ARITHMETISCHE DARSTELLUNG DER FORMALEN LOGIK

Tabellenanhang

Peter Jaenecke

A_1 Anwendungsbereiche der Logik

	materiell	**ideell**
Objektmenge:	elektrische Schalter	Aussagen
Textur:	Schaltbild	Satz
Wertebereich:	{an, aus}	{wahr, falsch, unbestimmt}

Tabelle 1: Gegenüberstellung von materiellen und ideellen Anwendungsbereichen der Logik. Der Wertebereich gibt an, welche Zustände die Objekte aus Objektmenge einnehmen können, die Textur ist ein geeignetes zeichensprachliches Gebilde zur Beschreibung der Objekte.

A_2 Restklassenarithmetik Modulo 2

Es gelte für alle $a, b, c \in \mathbb{W}$:

Ringaxiome:

R_1	$a + b = b + a$	(kommutatives Gesetz der Addition)
R_2	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(assoziatives Gesetz der Addition)
R_3	Es gibt ein x mit $a + x = b$	(Umkehrbarkeit der Addition)
R_4	$a \cdot b = b \cdot a$	(kommutatives Gesetz der Multiplikation)
R_5	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(assoziatives Gesetz der Multiplikation)
R_6	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	(distributives Gesetz)

Spezielle Axiome der Restklassenarithmetik Modulo 2:

$R_{\mathbb{W}}$	$\mathbb{W} = \{0, 1\}$	(Festlegung des Wertebereiches)
R_+	$a + a = 0$	(Nullelement)
$R_\bullet$	$a \cdot a = a$	(Idempotenz)

Tabelle 2: Axiome der Restklassenarithmetik Modulo 2.

Es gelte für alle $a, b, c \in \mathbb{W}$ die Sätze:

RS_1 $a + 0 = a$
RS_2 wenn $x + a = b$, dann $x = a + b$ und umgekehrt
RS_3 $a \cdot 0 = 0$
RS_4 $a \cdot (a + 1) = 0$
RS_5 $a \cdot 1 = a$
RS_6 $a \cdot (b + a \cdot c) = a \cdot (b + c)$
RS_7 wenn $a \cdot b = 1$, dann $a = b = 1$
RS_8 wenn $a + b + a \cdot b = 0$, dann $a = b = 0$

Tabelle 3: Charakteristische Sätze der Restklassenarithmetik Modulo 2.

A_3 Wahrheitswertetafeln für die ein- und zweistelligen Junktoren

	Verneinen (Negation)	Unveränderlassen (Identität)	Wahrmachen (Tautologie)	Falschmachen (Kontradiktion)
p	**¬p**	**÷p**	**◊p**	**#p**
w	f	w	w	f
f	w	f	w	f
	p + 1	p	1	0

Tabelle 4: Wahrheitswertetafeln der einstellige Junktoren und ihr arithmetisches Gegenstück.

Bezeichnung **logische**	 **technische**	**Symbol**	**p** **q**	w w	w f	f w	f f	Arithmetische Operation
Einsfunktion				w	w	w	w	1
Alternative, Disjunktion (Oder)	OR	∨		w	w	w	f	p + q + p ● q
Gegenimplikation, Replikation		←		w	w	f	w	q + p ● q + 1
Transferfunktion **p**				w	w	f	f	p
Implikation (wenn-dann)		→		w	f	w	w	p + p ● q + 1
Transferfunktion **q**				w	f	w	f	q
Äquivalenz	XNOR	↔		w	f	f	w	p + q + 1
Konjunktion (und)	AND	∧		w	f	f	f	p ● q
SHEFFER Strich	NAND	|, ↑		f	w	w	w	p ● q + 1
Exklusives Oder, Autfunktion[1]	XOR	Y		f	w	w	f	p + q
Negation **q**		¬		f	w	f	w	q + 1
Rehibition (**q**, aber nicht **p**)		⊥		f	w	f	f	p + p ● q
Negation **p**		¬		f	f	w	w	p + 1
Inhibition (**p**, aber nicht **q**)		⊤		f	f	w	f	q + p ● q
NICOD Funktion (weder-noch)	NOR	↓		f	f	f	w	p + q + p ● q + 1
Nullfunktion				f	f	f	f	0

Tabelle 5: Wahrheitswertetafeln der zweistellige Junktoren und ihr arithmetisches Gegenstück.

[1] Auch: Antivalenz.

A_4 Gesetze

$\neg p =$
$p \mid p$
$p \downarrow p$
p Y w
$p \mid (p \vee q)$
$p \rightarrow f$

Tabelle 6: Gesetze über die Verneinung.

$p \wedge q =$
$\neg(\neg p \vee \neg q)$
$\neg p \downarrow \neg q$
$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
$(p \mid q) \mid (p \mid q)$

Tabelle 7: Gesetze über die Konjunktion.

$p \vee q =$
$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
$(p \rightarrow q) \rightarrow q$
$\neg(p \downarrow q)$
$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
$(p \mid p) \mid (q \mid q)$

Tabelle 8: Gesetze über die Alternative.

p Y q =
$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
$(p \mid q) \wedge (p \vee q)$

Tabelle 9: Gesetze über das exklusive Oder.

$p \rightarrow q =$
$\neg p \vee q$
$\neg(p \wedge \neg q)$
$\neg(\neg p \downarrow q)$
$\neg[(p \downarrow p) \downarrow q] \downarrow [(p \downarrow p) \downarrow q]$

Tabelle 10: Gesetze über die Implikation.

$p \leftrightarrow q =$
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$
$\neg[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)]$

Tabelle 11: Gesetze über die Äquivalenz.

$p \downarrow q =$
$\neg p \wedge \neg q$

zwar p, aber nicht q
$p \wedge \neg q$

nicht p sondern q
$\neg p \wedge q$

Not Koimplikation

IEEE Standard Logic 1164

	U			X			0			1			Z			W			L			H			-		
	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y	∧	∨	Y
U	U	U	U	U	U	U	0	U	U	U	1	U	U	U	U	U	U	U	0	U	U	U	1	U	U	U	U
X	U	U	U	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X
0	0	U	U	0	X	X	0	0	0	0	1	1	0	X	X	0	X	X	0	0	0	0	1	1	0	X	X
1	U	1	U	X	1	1	0	1	1	1	1	0	X	1	X	X	1	X	0	1	1	1	1	0	X	1	X
Z	U	U	U	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X
W	U	U	U	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X
L	0	U	U	0	X	X	0	0	0	0	1	1	0	X	X	0	X	X	0	0	0	0	1	1	0	X	X
H	U	1	U	X	1	1	0	1	1	1	1	0	X	1	X	X	1	X	0	1	1	1	1	0	X	1	X
-	U	U	U	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	1	X	X	X	X

p	U	X	0	1	Z	W	L	H	-
¬p	U	X	1	0	X	X	1	0	X

Tabelle 12: Wahrheitswertetabellen der neunwertigen Logik definiert als IEEE Standard Logic 1164.

Deutsche Bezeichnung	**Bezeichnung von IEEE**	**Symbol**
logische Null (starker Treiber)	Logic 0 (driven)	0
logische Eins (starker Treiber)	Logic 1 (driven)	1
undefiniert	Uninitialized	U
unbekannt (starker Treiber)	Unknown	X
hochohmig (hohe Impedanz)	High impedance	Z
unbekannt (schwacher Treiber)	Weak 1	W
logische Null (schwacher Treiber)	Logic 0 (read)	L
logische Eins (schwacher Treiber)	Logic 1 (read)	H
unwichtig	Don't-care	-

Tabelle 13: IEEE Bezeichnung der Wahrheitswerte und ihre deutsche Entsprechung.

Literatur

Siehe Literaturgesamtverzeichnis.

http://www.peterjaenecke.de/logik.html 11.02.14