ARITHMETISCHE DARSTELLUNG DER FORMALEN LOGIK

I. Begriffliche Grundlagen

Peter Jaenecke

Die arithmetische Darstellung der Logik beruht auf der Restklassenarithmetik Modulo 2, dabei entspricht der Addition dem exklusiven Oder und der Multiplikation dem Und. Um zwei ganz unterschiedliche Arten von Dingen, nämlich die digitalen Systeme aus der physikalischen und die Gedankensysteme aus der ideellen Welt durch gemeinsame Begriffe besser beschreiben zu können, orientiert sich die Anpassung der logischen Begriffe an die neuen Erfordernisse am Systembegriff; außerdem sind die Begriffe so ausgelegt, dass sie auch auf die mehrwertige Logik zutreffen. Nach Klärung der darstellerischen Hilfsmittel werden die Junktoren bzw. Gatter und deren Verknüpfungen eingeführt, es folgen die Relationen, die logischen Ausdrücke und Funktion sowie die analytischen Gesetze und Axiome. Von den letzteren wird ein Maß für deren Informationsgehalt angegeben. Der erste Teil schließt mit der Charakterisierung des für eine Anwendung wichtigen Darstellungsproblems ab.

1 Einleitung

Der russische Logiker ŽEGALKIN stellte 1927 - 1929 in mehreren, heute schwer zugänglichen Aufsätzen eine Arithmetisierung der formalen Logik vor, die auf der Restklassenarithmetik Modulo 2 beruht.[1] Zwischen ihr und der zweiwertigen Junktorenlogik besteht ein einfacher Zusammenhang: Das logische Und entspricht der Multiplikation, das exklusive Oder der Addition. Über diese Entsprechung lassen sich alle junktorenlogischen Ausdrücke auf arithmetische zurückführen, so dass alle logischen Operationen in Rechenoperationen umgewandelt werden können. Obwohl schon PEANO[2] die charakteristischen Axiome der Restklassenaddition angibt und in der Folgezeit immer wieder einmal auf diese Arithmetik hingewiesen wird, scheint der Ansatz von ŽEGALKIN in der Logik nicht weiter verfolgt worden zu sein: Wenn überhaupt, so findet er höchstens in Fußnoten oder in Verbindung mit der BOOLE Algebra Erwähnung, indem gezeigt wird, dass sich diese Algebra statt mit dem normalen Oder auch mit dem exklusiven Oder begründen lässt, bzw. dass die Postulate der BOOLE Algebra auch diese Operation mit umfassen.[3]

Auch bei technischen Anwendungen dominiert bislang der auf dem normalen Oder beruhende traditionelle Ansatz, obwohl der arithmetische in der westlichen Welt bereits 1954 von REED und MULLER bekannt gemacht wurde. Sie beschäftigten sich vor allem mit dem Entwurf von Schaltkreisen und mit Kodes zur Erkennung und Korrektur von Fehlern bei der Nachrichtenübertragung.[4] Aufgrund ihrer Arbeiten wird der arithmetische Ansatz auch als ‚REED-MULLER Darstellung' bezeichnet. In der Folgezeit gab es eine Reihe von Untersuchungen, die sich jedoch nahezu ausschließlich mit Anwendungen, hier vor allem mit dem Entwurf von elektronischen Schaltungen beschäftigten.[5] Der vorliegende Artikel ist dagegen der Beginn einer Artikelreihe, in der es um den systematischen Aufbau der formalen Logik geht, und zwar um einen Aufbau auf arithmetischer Grundlage, so dass alle logische Operationen, insbesondere auch die Beweise, rein rechnerisch ausgeführt werden können.

Rechenoperationen kommen in der Logik selten vor. Ihr geringes Ansehen beruht offenbar auf der Ansicht, es ließe sich nur ein Teil der in der Logik anfallenden Probleme arithmetisch lösen. Vielleicht rührt die Geringschätzung aber auch nur von der starken Bindung an die Tradition her und ist somit eine spezielle Form von Unwissenheit. Es zeigt sich nämlich, dass jede entweder durch Wertetabellen oder durch ein Axiomensystem charakterisierte Junktorenlogik arithmetisch darstellbar ist. Formal sind also arithmetische und traditionelle Darstellung gleichwertig, praktisch jedoch nicht: Die äußerst einfachen Rechenregeln erleichtern in der arithmetischen Darstel-

[1] ŽEGALKIN (1927): *Über die Technik der Berechnung von Sätzen in der symbolischen Logik* (russ.); ŽEGALKIN (1928): *Arithmetisierung der symbolischen Logik* (russ.); ŽEGALKIN (1929): *Arithmetisierung der symbolischen Logik, Fortsetzung* (russ.).

[2] PEANO (1895): *Formulaire de Mathématiques*; s. auch BERNSTEIN (1936): *Postulates for Boolean algebra*, p. 317.

[3] Beispielhaft seien hier FRINK (1928): *On the existence of linear algebras in Boolean algebras* und BERNSTEIN (1936): *Postulates for Boolean algebra involving the operation of complete disjunction* genannt.

[4] REED (1954): *A class of multiple – error correcting codes;* MULLER (1954): *Application of Boolean algebra.*

[5] Z.B. SAUL (1992): *Logic Synthesis for Arithmetic Circuits;* SASAO (1993): *Logic Synthesis and Optimization;* STEINBACH & KEMPE (1993): *Minimization of AND-ExOR Expressions;* POSTHOFF & STEINBACH (2004): *Logical Functions and Equations.*

lung viele Herleitungen, so dass man nun in Bereiche vorstoßen kann, die aufgrund des hohen technischen Aufwandes bislang als unzugänglich gelten. Hierzu gehört z.B. die Aufgabe, zu einer vorgegebenen Junktorenmenge das kleinstmögliche Axiomensystem zu bestimmen.

Die Behauptung, beide Darstellungen seien formal gleichwertig, entspricht zunächst nur der traditionell übliche Auffassung, die aber streng genommen eines Beweises bedarf. Doch versucht man ihn auszuführen, ergeben sich unerwartete Schwierigkeiten: Um nämlich zeigen zu können, dass zwei Ansätze äquivalent sind, müssen beide in einer beweisverwertbaren Form vorliegen. Bezüglich der Restklassenarithmetik ist dies der Fall, aber wie sieht es damit in den traditionellen Logikdarstellungen aus?

Nicht sehr vorteilhaft, denn man ist sich noch nicht einmal über den Namen einig,[6] von der verwirrenden Vielzahl der Begriffe und der uneinheitlichen Zeichengebung einmal ganz abgesehen. Auch ist nicht immer sicher, ob es sich überhaupt in den Lehrbüchern stets um den gleichen Stoff handelt. Zwar hat sich inzwischen weltweit ein Lehrkanon für den Logikgrundkurs herausgebildet, der die klassische Aussagenlogik und die Prädikatenlogik erster Stufe umfasst, doch die dort und in den entsprechenden Lehrbüchern angegebenen rhapsodischen Logikcharakterisierungen erweisen sich in verschiedener Hinsicht als unzureichend:

Die Aussagenlogik wird eingeführt, indem man von einigen traditionellen, meist umgangssprachlich erläuterten Junktoren Wahrheitswertetabellen angibt; mit diesen Junktoren formuliert man dann einige Gesetze und beweist sie ebenfalls über solche Tabellen. Anschließend diskutiert man noch ein oder zwei Axiomensysteme, doch es fehlen Hinweise darauf, wozu man sie braucht und welcher Zusammenhang zwischen ihnen und den Tabellen besteht. Außerdem werden zusätzlich zu den Axiomen noch bestimmte Schlussregeln vorausgesetzt, wobei allerdings offenbleibt, ob es sich bei ihnen um zusätzliche Axiome oder „bloß“ um Regeln handelt und worin sich gegebenenfalls Regeln und Axiome voneinander unterscheiden. Der Schlussfolgerungsbegriff selbst ist mehrdeutig; oft fehlt eine klare Abgrenzung zum Ableitungsbegriff.

[6] Die Verwirrung zeigt sich bereits an den Titeln der Logiklehrbücher: Gegenstand der Abhandlung sind jeweils folgende Logiken: die theoretische (HILBERT & ACKERMANN), die neue (JOHOS), die mathematische (ASSER), die formale (BOCHENSKY, BORKOWSKI, HOYNINGEN-HUENE, LORENZEN), die moderne (KLAUS) und schließlich auch einfach nur die Logik (ROSENKRANZ, STROBACH) usw., um nur einige Beispiele aus dem deutschsprachigen Raum zu nennen.

Handelt es sich bei den verschiedenen Bezeichnungen für die Logik bloß um Namen für weitgehend dasselbe Gebiet, so wird die Lage immer undurchsichtiger, wenn man noch die sogenannten nicht-klassischen Logiken hinzunimmt sowie Logiken, die in Verbindung mit Rechneranwendungen entstanden. Zu den ersteren zählen modale, intuitionistische, mehrwertige, parakonsistente Logik, ferner Relevanzlogik, Zeitlogik, Supervaluationslogik usw., zu den letzteren etwa Fuzzy Logik, Beschreibungslogik, Frame Logik, Default Logik. Diese Vielzahl wird noch weiter vermehrt z.B. durch unterschiedliche Schlussverfahren wie nicht-monotones Schließen, Schließen mit unvollständigem Wissen oder Schließen unter einer bestimmten Zusatzannahme, z.B. unter der sogenannten Annahme über die Offenheit bzw. Abgeschlossenheit der Welt.[7]

Diese hier nur beispielhaft aufgezählten methodischen Defizite veranschaulichen, warum die herkömmlichen Logikdarstellungen für eine korrekte Gleichwertigkeitsbeweisführung wenig geeignet sind. Überhaupt drängt sich bei der Lektüre der Eindruck auf, dass es als hoffnungsloses Unterfangen angesehen wird, diese verschiedenartigsten Ansätze in einen systematischen Zusammenhang zu bringen. Damit liefert die Logik von sich ein trauriges Bild, wenn sie einerseits bei anderen Wissenschaften Exaktheit einfordert, aber nicht in der Lage ist, auf eigenem Gebiet Ordnung zu schaffen.

Die Restklassenarithmetik Modulo 2 bietet dagegen ein ganz anderes Ansehen: Sie lässt sich durch einige wenige leicht überschaubare Axiome eindeutig charakterisieren; außerdem ist sie frei von historisch-philosophischen Altlasten. Es liegt daher nahe, nicht wie man zunächst erwarten würde irgendeine der traditionellen Logikdarstellungen zum Maßstab für die arithmetische Darstellung zu verwenden, sondern umgekehrt letztere als sichere Ausgangsbasis zu wählen, um dann von ihr aus mit kritischem Blick die ersteren zu systematisieren.

Es gibt nämlich genau zwei Möglichkeiten: Entweder lässt sich ein spezieller Logikkalkül auf die Restklassenarithmetik zurückführen oder es ist nicht möglich. Für alle zum ersten Fall gehörenden Kalküle ist dann die Restklassenarithmetik die zugehörige Theorie. Für alle anderen Kalküle lässt sich zumindest feststellen, warum sie nicht arithmetisch zugänglich sind. Daraus ergeben sich wiederum Hinweise für eine systematische Behandlung dieser Kalküle, denn sie können nun wenigstens nach ihren Unterschieden zum arithmetischen Ansatz geordnet werden; in manchen Fällen lassen sie

[7] Open/closed world assumption.

sich sogar durch eine geeignete Erweiterung ebenfalls arithmetisch darstellen. Die systematische Darstellung eines Sachgebietes ist aber nicht nur von theoretischem Interesse, sie hat auch große Bedeutung für die Anwendung: Nur durch sie sind Aussagen darüber möglich, welche Möglichkeiten der Formalismus bietet und unter welchen Voraussetzungen er überhaupt angewendet werden darf.

Erweiterungen der Aussagenlogik sind bedeutsam im Hinblick auf künftige Anwendungen. Angenommen, es gelte die folgende Berechenbarkeitsthese: *Ein Algorithmus ist dann und nur dann maschinell berechenbar, wenn er sich als ein Ausdruck der zweiwertigen Aussagenlogik, d.h. also, wenn er sich arithmetisch darstellen lässt.* Dann wäre es interessant zu wissen, welche logischen Ansätze arithmetisierbar und somit auch berechenbar sind. Ein prominentes Beispiel hierfür ist die mehrwertige Aussagenlogik, denn sie lässt sich durch eine einfache Erweiterung arithmetisieren. Am Rande sei erwähnt, dass sich aus der Geltung der obigen These ein leicht zu handhabender Berechenbarkeitsbegriff ergibt.

Beim Übergang von der traditionellen Sichtweise zur arithmetischen handelt es sich also um einen interessanten Wechsel der Perspektive, denn es zeigt sich, dass der arithmetische Ansatz nicht nur eine geschlossene Begriffsbildung über die Sprachelemente der Arithmetik einzuführen erlaubt, sondern auch die Möglichkeit bietet, von einer gesicherten Basis aus in die Vielzahl logischer Ansätze eine theoretische Geschlossenheit zu bringen. Sie fördert das Verständnis dieser Ansätze und erleichtert deren technische Nutzung.

*

Die arithmetische Darstellung der Logik erfolgt in mehreren Teilen. In dem vorliegenden Teil geht es um die Einführung eines tragfähigen Begriffsgerüstes. Die beiden nächsten Teile behandeln die Arithmetrisierung der zweiwertigen Junktorenlogik, an sie schließt sich ein ausführlicher Anwendungsteil an. Danach werden die Prädikatenlogik und einige sogenannte nichtklassische Logiken unter dem Gesichtspunkt ihrer Arithmetisierung behandelt. Die Aufsatzfolge wird begleitet durch ein Glossar sowie durch einen Anhang, in dem die wichtigsten Definitionen, Tabellen und Formeln festgehalten sind.

2 Grundbegriffe

Die traditionelle Darstellung der Aussagenlogik beruht auf Junktoren; wir bezeichnen sie daher als *junktorielle Darstellung* und grenzen sie damit von der arithmetischen ab. Letztere bricht in mancherlei Hinsicht mit der Tradition; als Folge müssen mehrere historisch bedingte Begriffe modernisiert werden, denn sie erweisen sich nicht nur als zu eng, sondern sie verkörpern auch zahlreiche, einer arithmetischen Darstellung entgegenstehende methodische Mängel: Die Arithmetik umfasst nur wenige, aber dafür klar definierte Sprachelemente: Neben den Variablen und Konstanten gibt es nur Addition und Multiplikation sowie die Gleichheits- und bei Bedarf noch die Kleinerrelation; allein auf diese Elemente müssen alle traditionellen logischen Begriffe zurückgeführt werden, ein Vorhaben, das keinen Spielraum für Ungenauigkeiten zulässt.

Bei der Anpassung der traditionellen Begriffe an die neuen Erfordernisse orientieren wir uns am Systembegriff. Dieser Ansatz wurde gewählt, um zwei ganz unterschiedliche Arten von Systemen durch gemeinsame Begriffe beschreiben zu können; es handelt sich um die digitalen Systeme aus der physikalischen und die Gedankensysteme aus der ideellen Welt. Bezüglich der digitalen Systeme gilt unser Hauptinteresse den (Digital)rechnern bzw. bestimmten Hardwarebausteinen, mit denen sich Berechnungen ausführen lassen; bezüglich der Gedankensysteme interessieren wir uns vor allem für systematisch zusammengestelltes Wissen. Es mag zunächst verwundern, solch unterschiedliche Systeme unter einem einheitlichen Aspekt betrachtet zu finden. Unter dem Gesichtspunkt, den Rechner zur Lösung kognitiver Aufgaben zu nutzen, erscheint jedoch dieses Vorhaben weniger befremdend, denn die Sprache, welche die Arbeitsweise eines Rechners festlegt, muss zugleich auch die Sprache sein, in der unsere systematisch geordneten Gedanken ausgedrückt werden können; andernfalls wäre ja eine Verbindung zwischen physikalischer und ideeller Welt gar nicht oder nur unter großen Einschränkungen möglich. Der Logik kommen hierbei zwei Aufgaben zu: sie ist Programmiersprache für „lauffähige“ Algorithmen und sie ist Beschreibungssprache für systematisch geordnete Gedanken. Damit sie ihre Aufgabe erfüllen kann, muss sie Begriffe zur Verfügung stellen, die in beiden Welten anwendbar sind; die systemtheoretischen scheinen sich hierfür besonders gut zu eignen.

2.1 Systemtheoretische Grundbegriffe

Systemtheoretische Untersuchungen beschäftigen sich mit den Beziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen von Gegenständen; über die Gegenstände selbst, über ihr Inneres, wird dabei nichts ausgesagt. Es handelt sich also um ein ganz einfaches Modell, das aufgrund seiner Einfachheit auf eine Vielzahl von Systemen passt. Dennoch ist es kein Modell, das nur einfache Systeme zu beschreiben gestattet, denn es besteht die Möglichkeit, eine beliebige Anzahl von Teilsystemen über ihre Ein- und Ausgangskanäle zu einem komplexen System zusammensetzen. Die Grundidee des systemtheoretischen Ansatzes ist somit das Baukastenprinzip, das darauf beruht, aus einigen wenigen elementaren Bausteinen eine große Zahl verschiedener Gebäude zu errichten. Solche elementaren Bausteine sind beim systemtheoretischen Ansatz die Basissysteme:

Definition 1: Basissystem

Ein Basissystem ist ein gedanklich nicht weiter zerlegbarer Gegenstand mit einer wohldefinierten Zahl von Ein- und Ausgangskanälen (Abbildung 1).

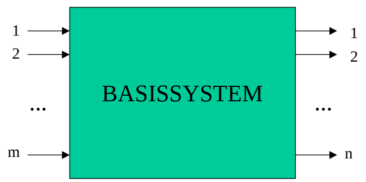

Abbildung 1: Basissystem mit m Eingangs- und n Ausgangskanälen.

Dabei ist bei einem materiellen System ein Eingangskanal ein physikalischer Kanal, über den Energie und durch sie eventuell auch Information in das System hineinfließt; dementsprechend ist ein Ausgangskanal, ein physikalischer Kanal, über den Energie und eventuell auch Information aus dem System herausfließt. Bei ideellen Systemen sind die Zusammenhänge nicht so offensichtlich. Zwar erfolgt die Verarbeitung von Gedanken letztlich ebenfalls auf der physikalischen Ebene, so dass es auch hier materielle Ein- und Ausgangskanäle geben muss, doch sind uns die Vorgänge im Einzelnen noch unbekannt, vielleicht werden sie uns auch immer unbekannt bleiben. Aus dieser Unkenntnis erwächst jedoch – wie wir noch sehen werden – kein Nachteil, denn für den systemtheoretischen Ansatz reicht es aus, wenn es mindestens ein Referenzsystem mit hinreichend bekannten Vorgänge gibt, auf das dann die übrigen Systeme zurückgeführt werden können.

Eingangskanäle haben stets einen Ursprung, Ausgangskanäle sind nur wirksam, wenn sie auf ein Ziel treffen. Wie schon erwähnt, bietet es sich daher an, Basissysteme als Bausteine zu verwenden, aus denen sich komplexere Systeme aufbauen lassen; dies führt uns zum Systembegriff:

Definition 2: System

Ein System ist ein Gegenstand mit einer wohldefinierten Zahl von Ein- und Ausgangskanälen, der aus einem oder mehreren, über Ein- und Ausgangskanäle aneinander gekoppelten Basissystemen besteht (Abbildung 2).

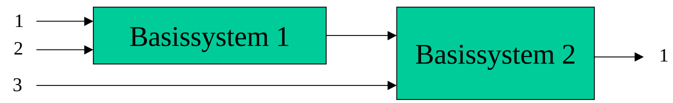

Abbildung 2: Aus zwei Basissystemen bestehendes System mit den drei Eingangskanälen 1, 2, 3 und einem Ausgangskanal.

Gegenstände können von großer Komplexität sein. Um sie überschaubar zu halten, ist es oft von Vorteil, sie in verschiedene, jeweils eine funktionelle Einheit bildende Teilsysteme zu zerlegen:

Definition 3: Teilsystem

Ein Teilsystem ist ein gedanklich abgegrenzter Teilgegenstand eines Systems mit einer wohldefinierten Zahl von Ein- und Ausgangskanälen, der aus einem Basissystem oder aus mehreren, über Ein- und Ausgangskanäle aneinander gekoppelten Basissystemen besteht (Abbildung 3).

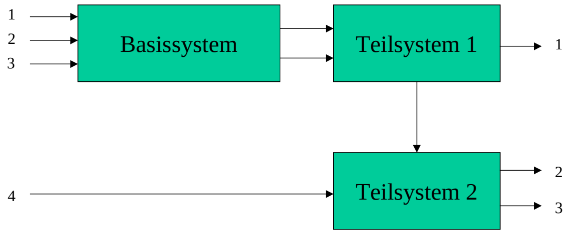

Abbildung 3: Ein aus einem Basissystem und zwei Teilsystemen aufgebautes System, das über vier Eingangs- und drei Ausgangskanäle verfügt.

Die Unterscheidung zwischen Basissystem, Teilsystem und System ist eine rein gedankliche Unterscheidung, und so ist auch ein Basissystem nur der Spezialfall eines Systems bzw. eines Teilsystems. Die Unterteilung hängt vom Wissensstand über die betreffenden Systeme, aber auch von der jeweiligen Fragestellung ab. So kann es unter Umständen sinnvoll sein, einen Gegenstand, von dem man vermutet, dass er aus mehreren Teilen besteht, dennoch als Basissystem, oder, wie man manchmal auch sagt, als Black Box, zu betrachten. Interessiert man sich jedoch für die Funktionsweise dieses Gegenstandes, so wird man versuchen, ihn zumindest gedanklich in einzelne Basis- oder Teilsysteme zu zerlegen, insbesondere dann, wenn sie auch in anderen Gegenständen vorkommen.

Die bisher eingeführten Systemarten besitzen alle Eingangskanäle. Aufgrund dieser Eigenschaft können aus ihnen beliebig komplexe Gegenstände konstruiert werden. Doch da auch die komplexesten von ihnen stets Eingangskanäle besitzen, bleiben sie unabgeschlossen. Ein definitiver Abschluss ist im allgemeinen gar nicht möglich; er wäre auch kaum wünschenswert, weil er zu einem System führte, das hinsichtlich der eigentlichen Aufgabenstellung irrelevante Teilsysteme enthielte. Benötigt werden daher noch spezielle Systeme, dadurch gekennzeichnet, dass man bei ihnen von den Eingangskanälen absieht und nur das im Blick behält, was das System über die Ausgangskanäle übermittelt:

Definition 4: Primsystem

Ein Primsystem ist ein Basissystem, das nur Ausgangskanäle besitzt (Abbildung 4). Seine Eingangskanäle sind entweder unbekannt oder für die betreffende Fragestellung bedeutungslos.

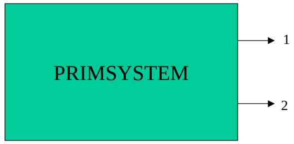

Abbildung 4: Primsystem mit zwei Ausgangskanälen. Bei Primsystemen sieht man von den Eingangskanälen ab und untersucht nur die über die Ausgangskanäle übermittelten Größen.

Eine besondere Bedeutung haben Systeme, bei denen sowohl die Ein- als auch die Ausgangsgrößen nur zwei, meist als 0 und 1 gekennzeichnete Elemente umfasst. Es sind dies die binären Systeme. Mehrere die gleiche Eigenschaft repräsentierende binäre Kanäle werden im allgemeinen zu einem Kanal mit einer bestimmten Wortbreite zusammengefasst (Abbildung 5). Sei etwa 0110 ein zu übertragenen Wert, dann braucht man hierzu einen 4 Bit breiten Kanal oder vier einzelne 1 Bit breite Kanäle.

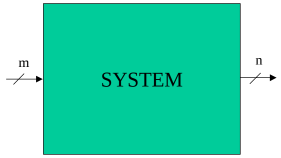

Abbildung 5: Binäres System mit einem m Bit breiten Eingangs- und einem n Bit breiten Ausgangskanal. Die jeweilige Wortbreite eines Kanals wird durch einen Schrägstrich mit der darüber gestellten Bit-Angabe charakterisiert.

Systemtheoretische Ansätze verdanken ihre große Anwendungsbreite unter anderem ihrem Systembegriff, der aufgrund seiner Flexibilität Systeme beliebigen Abstraktionsgrades zu erfassen gestattet: Man kann zu abstrakten Systemen übergehen, wenn dies nützlich ist, aber man kann auch auf der Ebene konkreter Systeme bleiben.

Bei einer häufig vorkommenden Abstraktion werden nur diejenigen Eingangskanäle betrachtet, die für die jeweilige Aufgabenstellung von Bedeutung sind; das betrifft insbesondere das Ausblenden von unwesentlichen Umwelteinflüssen. Denn jedes System ist zwar in einer Umwelt eingebettet, d.h. es gibt immer irgendwelche „Eingangskanäle“, über die solche Umwelteinflüsse auf das System übertragen werden, und ebenso gibt es stets „Ausgangskanäle“, von denen eine Wirkung vom System auf die Umwelt ausgeht, aber wenn überhaupt, so hat in aller Regel nur ein Teil von ihnen für die geplanten Untersuchungen eine Bedeutung.

Da man sich in der Systemtheorie hauptsächlich für Beziehungsstrukturen interessiert und nur am Rande für die Vorgänge, zu denen sie gehören, sieht man über weitere Abstraktionsschritte sowohl von den Eigenschaften der Kanäle als auch davon ab, in welcher Form die Systeme vorliegen. So könnten eine Waage und die Wirtschaftsbeziehungen zweier Länder zwei verschiedene Realisierungen eines einzigen abstrakten Systems sein. Durch eine geschickte Handhabung von Abstraktionen ist es somit möglich, ganz unterschiedliche Systeme mit der gleichen Sprache zu beschreiben.

Die oben beschriebenen Systemarten beziehen sich sowohl auf materielle als auch auf ideelle Systeme. Die beiden folgenden Abschnitte gehen auf die Besonderheiten ein, die materielle und ideelle Systeme mitsichbringen.

2.2 Materielle Systeme

Materiellen Systeme bestehen ebenso wie ihre Ein- und Ausgangskanäle aus Materie, d.h. jeder Kanal ist durch eine bestimmte in unterschiedlicher Intensität oder Größe auftretende physikalische Eigenschaft E gekennzeichnet, z.B. durch eine elektrische Spannung; diese Intensitäten repräsentieren analoge Werte aus einem bestimmten Wertebereich. Gegensatz dazu sind die digitalen Werte, die nicht auf physikalische Weise, sondern durch Zahlen erfasst werden. Analoge und digitale Werte können kontinuierlich oder diskret sein. Mit kontinuierlich verbindet man die Vorstellung, dass die Größen alle Werte zwischen einen Anfangs- und einem Endwert annehmen können; Beispiel ist ein sinusförmigen (analoger) Spannungsverlauf, mathematisch dargestellt durch eine Teilmenge der reellen Zahlen. Mit diskret ist eine Abstufung von Werten gemeint; Beispiel ist ein Eingangskanal, der nur bestimmte (analoge) Spannungswerte annimmt, die dann etwa durch die Zahlen –5, 0 und +5 Volt beschrieben werden.

Soll ein System kontrolliert auf die über seine Eingangskanäle eintreffenden Intensitäten antworten, so muss es in irgendeiner Form über ein Messgerät verfügen; dies kann ein sehr einfaches Gerät sein, es muss aber auf unterschiedliche Intensitäten unterschiedlich reagieren können. Ein Kanal überträgt somit Intensitäten von einer bestimmten Messgröße:

Definition: Messgröße, Messwert, Wertebereich

Eine Messgröße ist eine Eigenschaft eines Gegenstandes, z.B. eines Kanals, deren Intensität w durch eine Messung ermittelt werden kann. Im Idealfall ist der Messwert w genau ein Wert aus einer als Wertebereich $\mathbb{W}$ bezeichneten Menge von Werten.

Beispiel für solch eine Messgröße ist die elektrische Spannung. Bei einem kontinuierlichen Wertebereich gilt z.B. $w \in [-5, +5]$ Volt, bei einem durch bestimmte Spannungspegel realisierten diskreten Wertebereich z.B. $w \in \{-5, 0, +5\}$ Volt.

Systeme über ihre Ein- und Ausgangskanäle zu beschreiben, ist ein sehr allgemeines Verfahren zur Erfassung erfahrungswissenschaftlicher Sachverhalte: Es geht immer um Gegenstände mit einer gemeinsamen Eigenschaft E, die unterschiedliche Intensitäten hat. Sie äußert sich für ein Beobachtersystem als Eingangskanal; für den betreffenden Gegenstand ist es ein Ausgangskanal. Die Menge aller Intensitätswerte $\mathbb{W}$ definiert einen Zustandsraum für die Gegenstände mit der Eigenschaft E, d.h. sie sind charakterisiert durch einen Punkt w in diesem Raum; man kann auch sagen, der Gegenstand befinde sich aus Beobachtersicht bezüglich E im Zustand $w \in \mathbb{W}$.

In der Systemtheorie fasst man die Ein- und Ausgangskanäle oft als Nachrichtenkanäle auf, über die Nachrichten übertragen werden, wobei unter einer Nachricht eine Mitteilung verstanden wird, z.B. ein Gespräch oder ein Text. Zwar sind solche Übertragungen stets auch mit einem Energiefluss verbunden, aber der Empfänger reagiert nicht allein in Abhängigkeit von der übertragenen Energie, sondern vor allem auf den Inhalt der eingetroffenen Nachrichten. In allen anderen Fällen handelt es sich um rein energetische Umwandlungsprozesse. Das gilt auch für einfache Transformationen, bei denen über energetische Prozesse lediglich Werte umgewandelt werden. Diese Prozesse charakterisieren jedoch nicht das System. Der Energiefluss wird nur dann mit einbezogen, wenn er für die Beziehungen zwischen Ein- und Ausgangsgrößen bedeutsam ist.

Bei einem materiellen Primsystem sieht man von den Eingangskanälen ab. Ausgangspunkt dieser Abstraktion ist die Vorstellung, dass bestimmte Gegenstände sich hauptsächlich durch ihre über Ausgangskanäle gekennzeichneten Eigenschaften in Erscheinung treten, während man die Ursache dieser Eigenschaften entweder gar nicht kennt oder sich nicht für sie interessiert. Letzteres ist z.B. bei einer Tastatur der Fall, welche technisch gesehen eine Datenquelle darstellt; die Person, welche die Tastatur bedient, hat dagegen keine technische Bedeutung, obwohl sie die Daten liefert. Die Intensitäten dieser Eigenschaften wie Masse, Temperatur, Länge usw. können für bestimmte Gegenstände einen charakteristischen konstanten Wert haben, sie können aber auch zeitabhängig schwanken wie z.B. die Spannungsimpulse, die von einer Tastatur ausgehen.

Ein materielles Nichtprimsystem wandelt eine bestimmte Anzahl von analogen Eingangswerten in eine bestimmte Anzahl von analogen Ausgangswerten um. Dabei kann das System selbst entweder unverändert bleiben oder einer Veränderung unterliegen, d.h. die Eingangswerte hinterlassen in ihm Spuren. Im ersten Fall liegt ein statisches, im zweiten ein dynamisches System vor. Bei einem statischen System muss man zwischen einer gedächtnislosen und einer gedächtnisgebundenen Umwandlung unterscheiden; dynamische Systeme sind stets gedächtnisgebunden. Gedächtnisgebundene Systeme besitzen – im Gegensatz zu den gedächtnisfreien Systemen – einen Speicher. Das Umwandlungsergebnis hängt bei ihnen von den Eingangswerten und den im Speicher vorliegenden Inhalt hat. Bei gedächtnisgebundenen statischen Systemen wird der Speicherinhalt geladen, bleibt dann aber (eventuell bis zu einer erneuten Umladung) unverändert (Abbildung 6), bei dynamischen Systemen ändert sich der Speicherinhalt fortlaufend in Abhängigkeit von seinem gegenwärtigen Inhalt und den Eingangswerten (Abbildung 7). Die Antwort eines dynamischen Systems hängt somit nicht nur von den Eingangswerten, sondern auch von seiner Vorgeschichte ab.

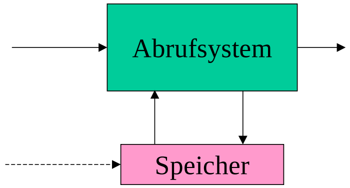

Abbildung 6: Beispiel für ein gedächtnisgebundenes statisches System. Die Ausgangsgröße hängt von der Eingangsgröße und vom Speicherinhalt ab, der sich während des Arbeitsbetriebes nicht verändert, aber über einen separaten Prozess geladen werden kann.

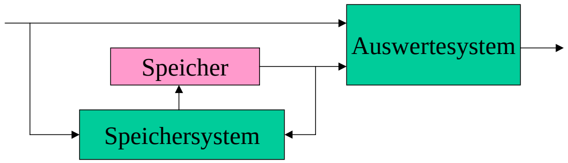

Abbildung 7: Beispiel für ein dynamisches System. Die Eingangsgröße sowie der jeweilige Speicherinhalt wird über das Auswertesystem in eine Ausgangsgröße umgewandelt. Gleichzeitig ermittelt das Speichersystem aus der Eingangsgröße und dem alten Speicherinhalt den neuen Speicherinhalt. Die Ausgangsgröße hängt somit nicht nur von der Eingangsgröße ab, sondern auch von der im Speicher festgehaltenen Vorgeschichte des Systems.

Statische Systeme (ob mit oder ohne Gedächtnis) besitzen nur genau einen inneren Zustand, deshalb liefern gleiche Eingangswerte auch immer die gleichen Ausgangswerte. Bei einem dynamischen System bestimmt der Speicherumfang die Anzahl der möglichen inneren Systemzustände. Da die Ausgangswerte nicht nur von den Eingangswerten, sondern auch vom jeweiligen inneren Systemzustand abhängen, können gleiche Eingangswerte zu unterschiedlichen Ausgangswerten führen. Dynamische Systeme haben interessante Eigenschaften, weil sie über ihre Eingangskanäle von anderen Systemen beeinflussbar sind, aber auch selbst über ihre Ausgangskanäle auf andere Systeme einwirken; dabei zeigen sie ein von ihrer Vorgeschichte abhängiges „Verhalten“.

Eine spezielle Gedächtnisform – wenn auch meist nicht unter diesem Namen erwähnt – ist der Alterungsprozess von Systemen. Damit sind unvermeidliche, nicht gewollte, durch Umwelteinflüsse oder einfach nur durch den Gebrauch entstehende Systemveränderungen gemeint. Diese meist langsamen Änderungen brauchen in der Regel nicht berücksichtigt zu werden.

Ein System, das abhängig vom Inhalt der Eingangsgrößen reagieren soll, muss in der Lage sein, die empfangenen Daten zu interpretieren. Dies ist aber nur möglich, wenn es über ein Gedächtnis verfügt. Umgekehrt reagiert jedes mit einem Gedächtnis ausgestattete System nicht nur energetisch, sondern auch immer in inhaltsabhängig. Daher ist die Unterscheidung zwischen energetischer und inhaltsbezogener Abhängigkeit zweitrangig; entscheidender ist, ob ein System ein Gedächtnis besitzt oder nicht.

Aus dem obigen folgt außerdem, dass man einer Ein- bzw. Ausgangsgröße allein nicht ansehen kann, ob sie Informationen überträgt; das lässt sich nur über ein System entscheiden, welches auch festlegt, um welche Informationen es handelt. Unterschiedliche Systeme werden daher die gleichen Eingangsdaten im allgemeinen unterschiedlich interpretieren.

2.3 Ideelle Systeme

Ein weiterer großer, der Tradition näherstehender Anwendungsbereich der Logik bezieht sich auf ideelle Systeme; bekannter sind sie unter dem Namen ‚Gedanken'; sie sind verkörpert durch Gedächtnisinhalte. Dass Gedanken einen Systemcharakter haben, äußert sich gelegentlich an Formulierungen wie ‚Gedankengebäude' oder ‚Gedankensystem', doch sind sie meist metaphorisch gemeint. Im folgenden wird sich jedoch zeigen, dass die Systemeigenschaften auch auf bestimmte Gedanken und ihre logischen Verknüpfungen zutreffen. Daraus ergibt sich eine methodische Gleichbehandlung von ideellen und materiellen Gegenständen, die es ermöglicht, Strukturäquivalenzen zwischen diesen beiden Gegenstandstypen herzustellen. Wie wir sehen werden ist dies eine notwendige Voraussetzung dafür, dass Gedankensysteme auf einem Rechner simuliert werden können.

Für die Logik sind nicht irgendwelche Gedanken von Interesse, sondern nur solche, die eine Bewertung zulassen. So wie die Massen der materiellen Gegenstände verschiedene Messwerte ergeben, so können auch Gedanken einen unterschiedlichen Wert haben. Obwohl also Gedanken keine materiellen Objekte sind, kann es dennoch sinnvoll sein, manchen von ihnen bestimmte Werte zuzusprechen. Solche Gedanken bezeichnen wir als Aussagen:

Definition: Aussage

Eine Aussage ist ein Gedanke, dem genau ein Wert w aus einer als Wertebereich $\mathbb{W}$ bezeichneten Menge von Werten zuordnet werden kann.[8]

Aussagen geben Sachverhalte wieder, etwa dass einem Gegenstand eine bestimmte Eigenschaft (eventuell unter mehreren anderen Eigenschaften) zukommt oder dass zwischen gewissen Gegenständen eine bestimmte Beziehung besteht. Die Aussagen könnten z.B. die Werte ‚wahr', ‚falsch' und ‚unbestimmt' haben.

Die ideellen Primsysteme werden durch Primaussagen[9] mit einem einzigen, stets einen Wert verkörpernden Ausgangskanal repräsentiert. Wie bei allen Primsystemen, so wird auch bei den Primaussagen davon abstrahiert wie der Wert im Ausgangskanal zustandekommt; sie besitzen deshalb keinen Eingangskanal (Abbildung 8).

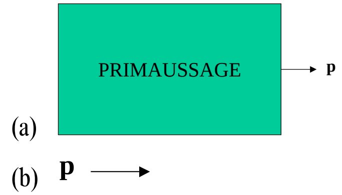

Abbildung 8: Primaussage mit Wertzuweisung; sie entspricht einem ideellen Primsystem mit einem Ausgangskanal. Abbildung (b) zeigt eine abgekürzte Darstellung von Abbildung (a).

Für die ideellen Ein- und Ausgangskanäle gilt sinngemäß das gleiche wie für die materiellen, allerdings gibt es für die ersteren nur eine Eigenschaft, die man durch ‚Wahrheitsgehalt' charakterisieren könnte. Die ihr zugehörigen Intensitäten geben den Wahrheitsgrad einer Aussage an. Ideelle Systeme sind – im Unterschied zu den materiellen – immer statische Systeme ohne Gedächtnis, denn ein Gedächtnis lässt sich nur in materieller Form realisieren.

[8] Dass eine Aussage nur genau einen Wert haben darf, scheint auf den ersten Blick eine Einschränkung zu sein. So darf in der sogenannten parakonsistenten Logik eine Aussage mehrere Werte zugleich annehmen. Dieser Fall stellt jedoch keine Erweiterung dar, denn man kann ihn auf einen mehrwertigen Logikkalkül zurückführen, bei dem den Aussagen wiederum nur genau ein Wert zukommt.

[9] Manchmal auch als ‚Atomaussage' bezeichnet.

Gedanken treten nicht nur als einzelne Primaussagen auf, sondern auch als Verknüpfungen von solchen Primaussagen (Abbildung 9); aus ihnen entstehen je nach Komplexität die ideelle Basissysteme oder die allgemeinen ideellen Systeme bzw. Teilsysteme.

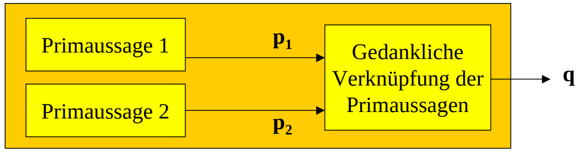

Abbildung 9: Schematische Darstellung einer Nichtprimaussage mit Wertzuweisung, die aus einer gedanklichen Verknüpfung von zwei Primaussagen hervorgegangen ist. Mit den Gelbtönen wird die ideelle Welt symbolisiert.

Gedanken trägt jeder in seinem Kopf mit sich herum; sie sind für andere unzugänglich, es sei denn, sie liegen in irgendeiner Sprache formuliert vor. Zur Vereinfachung zählen wir deshalb die Welt der Sprache ebenfalls zur ideellen Welt. Zwar beruhen auch die ideellen Systeme letztlich auf materiellen Vorgängen im Gehirn, aber direkt verfügbar ist immer nur deren Ergebnis, z.B. das Urteil ‚die Aussage p ist wahr'.

Bei materiellen Systemen werden die Verhältnisse von der Natur vorgegeben; hier liegen die Werte fest, und es geht nur darum, sie zu bestimmen. Die kognitiven Prozesse dagegen, die gedankliche Verknüpfungen ausführen, sind nicht nur für Untersuchungen schwer zugänglich, sondern auch ziemlich unzuverlässig: Im Prinzip können zwar beliebig viele Gedanken miteinander verknüpft werden, de facto bereiten aber bereits mehr als drei Verknüpfungen bei wechselnden Werten dem menschlichen Gedächtnis erhebliche Schwierigkeiten, so dass Hilfsmittel erforderlich sind, um die Ergebnisse abzusichern und sie nachvollziehbar zu machen.

Von besonderer Bedeutung für die wissenschaftliche Arbeit sind mentale Prozesse, die gewöhnlich als ‚Rechnen' bezeichnet werden. Das menschliche Gehirn ist in diesem Fall ein System, das über einen Eingangskanal eine Aufgabe gestellt bekommt und über einen Ausgangskanal die Lösung mitteilt. Im einfachsten Fall wären das Aufgaben wie ‚3 + 8' als Eingangs- und die Lösung ‚11' als Ausgangswert. Doch unter ‚Rechnen' sollen alle Zeichenoperationen verstanden werden, die nach bestimmten Regeln auszuführen sind, z.B. die Ausklammerung von $(a+b)^2$ in $a^2+2ab+b^2$ oder die Umformung der Gleichung $b-a+x=0$ in die Gleichung $x=a-b$ usw.

Rechnen im allgemeinen Sinn erfolgt nach bestimmten vorgegebenen Rechenregeln. Die im Gehirn ablaufenden Rechenprozesse lassen sich somit steuern, indem man von ihnen die Einhaltung der Regeln verlangt; letztere sind offenbar das entscheidende Steuerungsmoment, das auch sicherstellt, dass unterschiedliche Personen zum gleichen Ergebnis gelangen.

2.4 Beziehungen zwischen ideeller und materieller Welt

Die Zeichenoperationen blieben allerdings ein Glasperlenspiel, wenn sie nichts anderes als den Steuerungseffekt bewirkten. Ihre Besonderheit ist es jedoch, dass sich außerdem mit ihnen auch Wissen darstellen lässt. Damit öffnet sich für sie ein weites Anwendungsfeld, das in der Physik, aber auch in anderen Disziplinen, bereits ausgiebig durch Verwendung mathematischer Methoden genutzt wird. Abbildung 10 zeigt eine Gegenüberstellung der ideellen und materiellen Welt.

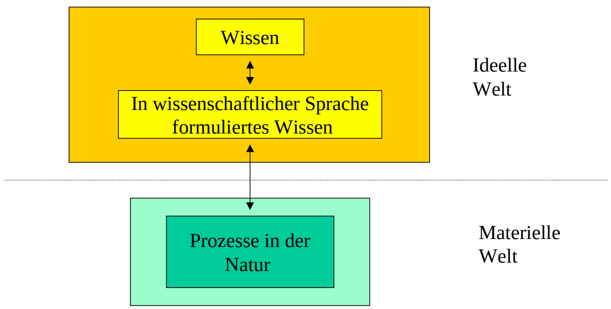

Abbildung 10: Gegenüberstellung der ideellen und materiellen Welt. Die ideelle Welt steht für das Wissen der in der materiellen Welt ablaufenden Prozesse. Die Doppelpfeile deuten an, dass sich die einzelnen Bereiche wechselseitig beeinflussen können. So wurden z.B. aufgrund naturwissenschaftlicher Kenntnisse Maschinen gebaut, die es in der Natur nicht gibt.

Ein Teil unseres Wissens über die materielle Welt wurde in einer wissenschaftlichen Sprache formuliert; es beschreibt bestimmte Prozesse in der Natur. Die Doppelpfeile in Abbildung 10 deuten eine wechselseitige Beziehung der einzelnen Bereiche an. Innerhalb der ideellen Welt ist damit gemeint, dass unser Wissen neue Darstellungsmittel erfordert und das letztere wiederum rückwirkend unser Wissen disziplinieren können. Auch zwischen ideeller und materieller Welt besteht solch eine Doppelbeziehung: Indem wir die Prozesse in der Natur untersuchen, erhalten wir Kenntnisse über sie, und diese erlauben uns Maschinen zu bauen und damit Prozesse ingangzusetzen, die es in der Natur zuvor nicht gab.

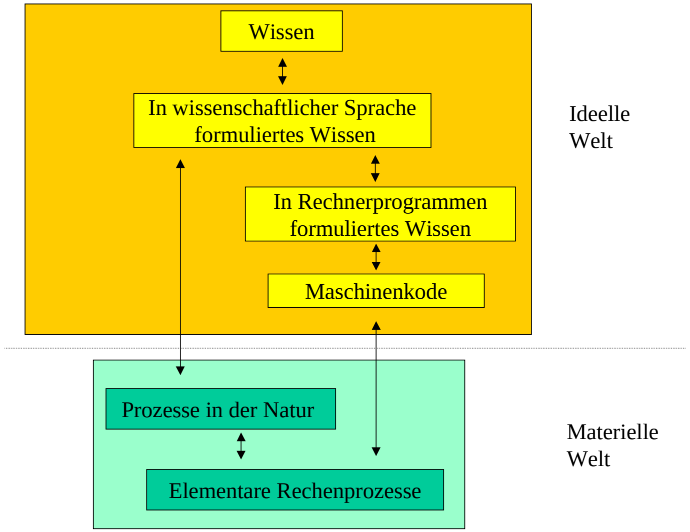

Abbildung 11: Erweiterte Gegenüberstellung der ideellen und materiellen Welt: Durch eine geeignete Darstellung von Wissen über bestimmte Prozesse in der Natur besteht die Möglichkeit, das Verhalten der letzteren mit Hilfe von elementaren Rechenprozessen zu simulieren.

Als außerordentlich folgenreich haben sich künstliche Prozesse erwiesen, mit denen man maschinelle Berechnungen ausführen kann; sie machen eine Erweiterung von dem in Abbildung 10 gezeigten Schema notwendig. Zunächst grenzen wir aus den in der Natur vorkommenden Prozessen einen Teilbereich aus, mit dem sich elementare Rechenprozesse verwirklichen lassen und fügen ihn dem linken Zweig aus Abbildung 10 hinzu; der übrige Teil des Zweiges bleibt gleich (Abbildung 11, linker Zweig). Die Rechenprozesse müssen gesteuert werden; hierfür sind zwei Erweiterungen notwendig (Abbildung 11, rechten Zweig): (1) wird eine Programmiersprache gebraucht, mit der sich die auszuführenden Rechenoperationen beschreiben lassen; sie ist für Menschen, aber nicht für den Rechner verständlich, so dass noch (2) ein Maschinenkode erforderlich ist, mit dem maschinengerechte Instruktionen ausgedrückt werden können.

Zwischen dem Maschinenkode aus der ideellen Welt und den der materiellen Welt zugehörigen elementaren Rechenprozessen muss es eine umkehrbar eindeutige Beziehung geben. Wählt man für den Rechner als physikalische Basis die Elektronik, so zeigt sich, dass hierfür ganz wenige elementare Schaltungen ausreichen. Ihre Eigenschaften und somit auch die mit ihnen verbundenen Rechenregeln beruhen nicht auf Erfindung, sondern ergeben sich aus der technischen Notwendigkeit; sie liegen also fest. Folglich muss sich der Maschinenkode nach ihnen richten.

Es stellt sich nun heraus, dass die elementaren elektronischen Schaltungen strukturäquivalent sind zu den in der Aussagenlogik behandelten ideellen Systemen, d.h. der Maschinenkode setzt sich aus aussagenlogischen Ausdrücken zusammen. Außerdem besteht eine Strukturäquivalenz zwischen der Aussagenlogik und der Restklassenarithmetik Modulo 2. Damit ergibt sich ein durchgehender Zusammenhang von dieser Arithmetik über die logischen Ausdrücke bis hin zu komplexen Gedankenverknüpfungen und Schaltkreisen.

Aber nicht nur auf der Beschreibungs-, sondern auch auf der Prozessebene gibt es Strukturäquivalenzen. So könnten im Prinzip die Berechnungen auch mit dem materiellen System ‚Gehirn' ausgeführt werden, so dass zwischen den elektronischen und den neurologischen Rechenprozessen ebenfalls eine Äquivalenz besteht; der Rechner simuliert gewissermaßen die im Gehirn ablaufenden Rechenprozesse.[10] Solche Prozesse könnten z.B. auch Schlussfolgerungen sein. Hier haben wir auf der einen Seite den Rechner, auf der anderen das Gehirn, das entweder „mit gesundem Menschenverstand" schlussfolgert oder die Methode des Rechners übernimmt und die Schlussfolgerung

[10] Allerdings braucht das Gehirn nicht programmiert zu werden; es kann „jede" Aufgabe lösen. Bei einem Rechner erfordert jede neue Aufgabe ein neues Programm. Von diesem Unterschied sehen wir hier ab. Dass ein elektronischer Rechner sehr viel schneller und meist auch zuverlässiger Arbeit als ein neurologischer, ist hier ebenfalls ohne Belang. Wichtig ist jedoch, dass aufgrund der Äquivalenz das Gehirn eine Kontrolle über die Arbeit des elektronischen Rechners ausüben kann.

ausrechnet. Mit einem Rechner lassen sich ganz allgemein Prozesse aus einem beliebigen Bereich simulieren, sofern genügend Wissen über diesen Bereich vorliegt und sofern es gelingt, das Wissen in einer Programmiersprache auszudrücken.

Das ist ein bemerkenswertes Faktum. Denn die Aussagenlogik ist zwar Teil der Wissenschaftssprache; als zu ausdrucksarm bewertet, spielt sie aber dort praktisch keine Rolle. Andererseits werden aber auf der Grundlage des in der Wissenschaftssprache abgelegten Wissens umfangreiche Rechnersimulationen durchgeführt. Um auf dem Rechner eingesetzt werden zu können, muss dabei das anspruchsvolle nichtaussagenlogisch formulierte Wissen durch das aussagenlogische Nadelöhr ‚Maschinenkode'. In Übereinstimmung mit der anfangs erwähnten Berechenbarkeitsthese kann man also nur das simulieren, was sich auch aussagenlogisch ausdrücken lässt. Wäre nun die Aussagenlogik tatsächlich so ausdrucksarm, wie man es ihr oft nachsagt, dann sollten solche Simulationen kaum zu brauchbaren Ergebnissen führen; das ist aber offenbar nicht der Fall. Damit rückt die Aussagenlogik wieder in den Blickpunkt des Interesses, nachdem sie lange Zeit im Schatten der Prädikatenlogik stand.

Aufgrund der oben beschriebenen Strukturäquivalenzen ist es möglich, die verschiedensten Systeme nicht nur mit den gleichen Methoden, sondern auch mit der gleichen, auf der Restklassenarithmetik aufbauenden Sprache zu erfassen. Diese Methoden gilt es nun zu entwickeln. Wir beginnen mit der Einführung der hierfür notwendigen sprachlichen Darstellungsmittel.

2.5 Hilfsmittel zur Darstellung von Systemen

Die Systeme besitzen gewisse Ein- und Ausgangskanäle, über die bestimmte Werte übertragen werden, dabei können Ein- und Ausgangswerte zu unterschiedlichen Mengen gehören. Wir unterscheiden daher zwischen Definitions- und Wertebereich:

Definition: Definitionsbereich, Wertebereich

Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ ist die Menge aller möglichen Eingangswerte, der Wertebereich $\mathbb{W}$ die Menge aller möglichen Ausgangswerte eines Systems oder einer Menge von Systemen.

Sei $\mathbb{D}_i$ der Definitionsbereich des i – ten Eingangskanals und $\mathbb{W}_j$ der Wertebereich des j - ten Ausgangskanals, dann ist der Definitions- bzw. Wertebereich eines Systems mit k Ein- bzw. l Ausgangskanälen gegeben durch

$$\mathbb{D}^k = \underbrace{\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2 \times \ldots \times \mathbb{D}_k}_{k-\text{faches kartesisches Produkt}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{W}^l = \underbrace{\mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2 \times \ldots \times \mathbb{W}_l}_{l-\text{faches kartesisches Produkt}} \; .$$

In der Logik wird selten zwischen diesen beiden Bereichen unterschieden; man fasst sie vielmehr zu einem Bereich zusammen und bezeichnet traditionsgemäß dessen Werte als Wahrheitswerte. Damit wird historisch bedingt die Nomenklatur von dem speziellen Bereich {wahr, falsch} in unzulässiger Weise auf alle anderen möglichen Bereiche übertragen.[11] Wir folgen dieser Sprachregelung nicht.

Systeme, welche für eine Logikanwendung geeignet sind, bezeichnen wir als ‚Logsysteme'; sie sind folgendermaßen gekennzeichnet:

Definition: Logsystem

Ein System ist ein Logsystem, wenn sein Definitions- und Wertebereich mindestens zwei verschiedene, höchstens aber abzählbar unendlich viele Elemente enthält.

Für eine logische Theorie spielt die Systemart keine Rolle. Im folgenden werden wir daher nur im Bedarfsfall zwischen den Systemarten unterscheiden; ansonsten bezieht sich der Begriff ‚Logsystem' sowohl auf Prim- und Basissysteme als auch auf eine beliebige Systemkombination.

Die Werte vom Definitions- bzw. Wertebereich spielen in einem Logsystem nur eine untergeordnete Rolle, dagegen hat die Anzahl der Werte einen maßgeblichen Einfluss auf die Systemstruktur. Sie wird durch die Wertigkeit zum Ausdruck gebracht. Wir definieren zunächst die Wertigkeit von Definitions- und Wertebereich, die wir kurz unter einem Bereich $\mathbb{B}$ zusammenfassen; $|\mathbb{B}|$ sei die Anzahl seiner Elemente:

Definition: n - wertiger Bereich ($n > 1$)

[11] Es handelt sich hierbei um einen methodischen Verstoß, der zu zahlreichen Missverständnissen und zu überflüssigen, sich um den Wahrheitsbegriff rankende Diskussionen geführt hat, ganz abgesehen davon, dass diese Bezeichnung bereits bei Wertebereichen mit mehr als zwei Werten fragwürdig wird.

Ein Bereich $\mathbb{B}$ umfasse I Kanäle; es sei $\mathbb{B}_i$ der Bereich seines i – ten Kanals und es gelte $n = \max(|\mathbb{B}_1|, |\mathbb{B}_2|, ..., |\mathbb{B}_I|)$. Dann ist der Bereich $\mathbb{B}$ n – wertig; der Fall (abzählbar) unendlich ist mit eingeschlossen.

Die Wertigkeit richtet sich also nach demjenigen Kanal, der die meisten Werte enthält. Entsprechend ist die n – Wertigkeit eines Logsystems folgendermaßen definiert:

Definition: n-wertiges Logsystem (n > 1)

Der Definitionsbereich eines Logsystems habe die Wertigkeit n_D, sein Wertebereich habe die Wertigkeit n_W und es gelte $n = \max(n_D, n_W)$. Dann ist das Logsystem n – wertig.

Auch bei einem Logsystem richtet sich die Wertigkeit nach dem Kanal mit der größten Anzahl von Elementen. Enthält z.B. der Definitionsbereich fünf Elemente und der Wertebereich drei, dann handelt es sich um ein fünfwertiges Logsystem.

In bestimmten Anwendungsfällen ist es vorteilhaft, die Bereiche eines Logsystems – gemeint sind der Definitions- und der Wertebereich – in disjunkte als ‚ausgezeichnete Bereiche' bezeichnete Teilbereiche zu unterteilen:

Definition: Ausgezeichnete Bereiche

Ausgezeichnete Bereiche $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, ..., \mathbb{B}_N$ mit $N \geq 2$ sind nicht-leere echte Teilmengen des Bereichs $\mathbb{B}$, für die gilt:

$$\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 \cup ... \cup \mathbb{B}_N = \mathbb{B},$$

$$\mathbb{B}_{n_1} \cap \mathbb{B}_{n_2} = \varnothing \quad (n_1 \neq n_2;\ n_1, n_2 = 1, 2, ..., N).$$

Sei z.B. N_W die Wertigkeit eines Logsystems und N die Anzahl seiner ausgezeichneten Definitionsbereiche. Nach Voraussetzung muss $N \leq N_W$ sein; mit der Wahl $N < N_W$ besteht die Möglichkeit, über ein höherwertiges Logsystem eine niederwertige Struktur zu legen, z.B. über ein zehnwertiges System eine vierwertige Struktur.

Dies war ursprünglich auch der Grund, ausgezeichnete Bereiche bei Logsystemen mit mehr als zwei Werten einzuführen. Um solche Systeme als Fortsetzung der klassischen zweiwertigen Logik betrachten und die Begriffe ‚Tautologie' (immer wahr) und ‚Widerspruch' (immer falsch) auch auf sie anwenden zu können, müssen wenigstens zwei ihrer Werte ausgewählt und ihnen die Rolle dieser klassischen Werte zugeschrieben werden. Man überlagert damit die mehrwertige Struktur mit einer zweiwertigen.

Für die Auszeichnung der Werte gibt es in der traditionellen Theorie der mehrwertigen Logik keine allgemeine Regel. Demnach dürfen, soweit verfügbar, noch weitere Werte diesen klassischen zugerechnet werden. Die herausgehobenen Werte heißen positiv bzw. negativ ausgezeichnete Werte, je nach dem, ob sie ‚wahr' bzw. ‚falsch' vertreten. Nicht jeder Wert muss ein ausgezeichneter sein. Man kann entweder eine Zweiteilung vornehmen, wobei es meist genügt, die positiven allein herauszuheben; die nicht ausgezeichneten übernehmen dann de facto die Rolle der negativ ausgezeichneten Werte. Oder man lässt eine Dreiteilung in positiv und negativ sowie in nicht ausgezeichnete Werte zu; letztere werden dann als zwischen diesen beiden liegend angesehen.

Die oben eingeführten ausgezeichneten Bereiche folgen nicht diesen speziellen, uneinheitlichen Festlegungen, insbesondere wird ihnen nicht die Aufgabe zugewiesen, die klassischen Werte ‚wahr' und ‚falsch' zu vertreten. Sie sind disjunkt und die Auszeichnung schließt immer alle Werte des Gesamtwertebereichs $\mathbb{B}$ ein.

In der Logik beschäftigt man sich selten mit einzelnen Systemen, vielmehr beziehen sich ihre Untersuchungen auf Systemgesamtheiten:

Definition: Systemgesamtheit

Eine Systemgesamtheit $\mathbb{S}$ ist eine Menge von Systemen, die alle den gleichen Definitions- und Wertebereich besitzen.

Um mit materiellen und ideellen Systemen umgehen zu können, müssen sie in eine sprachliche Form gebracht werden. Materielle Systeme lassen sich auf vielfältige Weise beschreiben, z.B. durch die in Abbildung 1 bis Abbildung 7 gezeigten Signalflussdiagramme, durch chemische Formeln, Schaltbilder und andere Darstellungsformen. Ideelle Systeme werden meist durch Sätze, aber z.B. auch durch mathematische Formeln sprachlich erfasst. Diese Vielfalt von Darstellungsformen erfordert einen allgemeinen Oberbegriff; es sei dies der Begriff Textur:

Definition: Textur

Eine Textur T ist ein zeichensprachliches Gebilde, das zur Beschreibung von Systemen dient.

Tabelle 1 zeigt eine Gegenüberstellung der beiden Systemarten, charakterisiert durch Objektmenge, Textur und Definitions- und Wertebereich. Aus Sicht der Anwendung muss die Logik über Darstellungsmittel verfügen, mit denen es möglich ist, diese drei Ebenen begrifflich klar auseinander zu halten.

	materiell	**ideell**
Systemgesamtheit:	Schalter	Aussagen
Textur:	Schaltbild	Satz
Definitionsbereich:	{an, aus}	{wahr, falsch, unbestimmt}
Wertebereich:	{an, aus}	{wahr, falsch}

Tabelle 1: Gegenüberstellung der sprachlichen Darstellungsmittel für materielle und ideelle Systeme. Der Definitionsbereich gibt die Menge der möglichen Eingangswerte, der Wertebereich die der möglichen Ausgangswerte an; die Textur ist ein zeichensprachliches Gebilde zur Beschreibung der Systeme.

Aufgrund der obigen Bezeichnungsweise kann man eine Textur von dem, was sie aussagt, in einfacher Weise unterscheiden. So gibt es zahlreiche durch unterschiedliche Texturen beschriebene physikalische Realisierungen ein und derselben Schaltfunktion. Auch die beiden Sätze

$S_1 =_{abk}$ Barcelona es la ciudad capital de España

und

$S_2 =_{abk}$ Barcelona ist die Hauptstadt von Spanien

sind verschieden, während ihr Inhalt (ihre Aussage) gleich ist. Ein und dieselbe Aussage kann somit in unterschiedlichen Sätzen zum Ausdruck gebracht werden, z.B. wie oben in Sätzen aus unterschiedlichen Sprachen. Aussage und Satz, Schalter und Schaltbild sind daher nicht identisch, und es gibt auch keine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen ihnen.[12]

Eine Variable ist ein Platzhalter; zu ihrer Charakterisierung gehört die Angabe, für welche Dinge sie Platzhalter sein soll. Tritt in einem Zeichensystem an verschiedenen Stellen das gleiche Zeichen auf, so muss es mit dem gleichen Ding ersetzt werden. Diese aus der Mathematik geläufige Regel besagt z.B., dass in der Gleichung $xy - x + y = 0$ die beiden Platzhalter/Variablen x und y für jeweils den gleichen Wert stehen, so dass sich etwa für $x = 4$ der Wert $y = ½$ ergibt.

Neben der Textur benötigen wie auch noch ein anderes zeichensprachliches Mittel, das wir als Vokabular bezeichnen. Ein Vokabular enthält alle Zeichen, die als Variable für eine bestimmte Klasse von Dingen zugelassen sind. Die Bezeichnung ist der Sprachtheorie entlehnt, in der ein Vokabular eine Menge von Wörtern darstellt; mit diesen Wörtern, und nur mit ihnen, dürfen Sätze gebildet werden. In einer Formelsprache entspricht ein Zeichen einem Wort in der Umgangssprache und eine Formel entspricht einem umgangssprachlichen Satz.

Zu der in Tabelle 1 gezeigten dreistufigen Struktur gehören drei Klassen von Dingen, deren Variablen wir der Anschaulichkeit halber typographisch unterscheiden. Die großen Buchstaben P, Q stehen für Texturvariablen, die zugehörigen kleinen kursiven Buchstaben *p*, *q*, ... für Systemvariablen und die kleinen Fettschriftbuchstaben **p**, **q**, ... für Wertevariablen; als Zeichen für die (konstanten) Werte verwenden wir die normalen kleinen Buchstaben w, w_1, w_2, ... Dabei können sich die Systemvariablen sowohl auf materielle als auch auf ideelle Systeme beziehen. Es gibt also die drei, die gleiche Anzahl von Zeichen enthaltenen Vokabularien

$$\mathbb{V}_{\mathbb{T}} = \{P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots\},$$

$$\mathbb{V}_{\mathbb{S}} = \{p, q, r, \ldots p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots\},$$

$$\mathbb{V}_{\mathbb{W}} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots\}$$

sowie die beiden Vokabularien

[12] KLAUS (1972): *Moderne Logik*, p. 33.

$$\mathbb{V}_{\mathbb{D}_\mathbb{B}} = \{w_1, w_2, \ldots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}_{\mathbb{W}_\mathbb{B}} = \{d_1, d_2, \ldots\},$$

welche die Zeichen für die Werte des Definitions- bzw. Wertebereichs enthalten. Vereinbarungsgemäß soll gelten, dass gleiche Zeichen zum gleichen Sachzusammenhang gehören; so ist z.B. $\mathbf{p_k}$ die Variable für den Wert des Systems p_k, beschrieben durch die Textur $\mathrm{P_k}$; k ist irgendein Index. Auf der logischen Ebene werden wir von den Objekten abstrahieren und uns nur noch mit ihren Werten beschäftigen (Tabelle 2).

	materiell	**ideell**	**zeichensprachlich**
Textur:	Schaltbild	Satz	$\mathbb{V}_\mathbb{T} = \{P, Q, \ldots\}$
Systemgesamtheit:	Schalter	Aussagen	$\mathbb{V}_\mathbb{S} = \{p, q, \ldots\}$

Wertevariablenmenge:			$\mathbb{V}_\mathbb{P} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \ldots\}$
Definitionsbereich:	{an, aus}	{wahr, falsch, unbestimmt}	$\mathbb{V}_\mathbb{D} = \{d_1, d_2, \ldots\}$
Wertebereich:	{an, aus}	{wahr, falsch}	$\mathbb{V}_\mathbb{W} = \{w_1, w_2, \ldots\}$

Tabelle 2: Abstraktionsschnitt zwischen System- und Wertewelt: Anstelle der Systeme werden jetzt nur noch die Beziehungen zwischen den Ein- und Ausgangswerten betrachtet. Der Schnitt kann wieder aufgehoben, indem man gleiche Buchstaben rückwärts verfolgt: Variable **p** gehört zum System p, das mit der Textur P beschrieben wurde.

In der Mathematik werden die Vokabulare nicht erwähnt. Was die verwendeten Zeichen bedeuten sollen, gibt man entweder explizit an oder man hält sich z.B. an die stillschweigende Übereinkunft, die letzten Buchstaben des Alphabets als Zeichen für unabhängige Variable zu verwenden. Durch das Ausblenden der Zeichenebene in der Mathematik bleibt das Elementzeichen eindeutig. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, dann ist z.B. mit ‚$n \in \mathbb{N}$' gemeint, dass das Zeichen n für irgendeinen *Wert* aus der Menge $\mathbb{N}$, also für irgendeine natürliche Zahl steht. Sind aber bestimmte Zeichen für eine bestimmte Klasse über ein Vokabular reserviert, darf also z.B. zur Bezeichnung einer natürlichen Zahl nur ein Zeichen aus dem Vokabular $\mathbb{V}_\mathbb{N} = \{n, n_1, n_2, \ldots\}$ verwendet werden, will man aber noch offen lassen, welches Zeichen, so würde man zunächst irgendein Zeichen wählen, z.B. das Zeichen a, und ebenfalls $a \in \mathbb{V}_\mathbb{N}$ schreiben. Will man außerdem noch zum Ausdruck bringen, dass a für eine natürliche Zahl stehen soll, müsste man noch $a \in \mathbb{N}$ hinzufügen. Nun ist es zwar nichts Außergewöhnliches, dass ein Gegenstand Element in verschiedenen Mengen sein kann, aber mit $a \in \mathbb{V}_\mathbb{N}$ ist offensichtlich etwas anderes gemeint als mit $a \in \mathbb{N}$: im ersten Fall geht es um die Zuordnung eines Zeichens, im zweiten um die Zugehörigkeit zu einer Menge. Um Verwechselungen zu vermeiden, verwenden wir für den ersten Fall das Elementzeichen ‚$\underset{\leftarrow}{\in}$' und behalten für den zweiten Fall das herkömmliche Elementzeichen ‚$\in$' bei, wir schreiben also

$$a \underset{\leftarrow}{\in} \mathbb{V}_\mathbb{N} \quad \text{und} \quad a \in \mathbb{N}.$$

Sei ‚$\rightleftharpoons$' das Zeichen für eine umkehrbar eindeutige Zuordnung und $\mathbb{S}$ eine Systemgesamtheit mit den Vokabularien $\mathbb{V}_\mathbb{T}, \mathbb{V}_\mathbb{S}, \mathbb{V}_\mathbb{P}, \mathbb{V}_\mathbb{D}, \mathbb{V}_\mathbb{W}$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$. Dann gibt es für das Beispiel ‚Die Erde ist eine Scheibe' folgende Zuordnungen:

(a) ‚Die Erde ist eine Scheibe' ist eine Textur; wir wählen für sie aus dem Vokabular $\mathbb{V}_\mathbb{T}$ das Symbol P_k, so dass gilt:

$$P_k \rightleftharpoons \text{Die Erde ist eine Scheibe}, \quad P_k \underset{\leftarrow}{\in} \mathbb{V}_\mathbb{T}.$$

(b) ‚Die Erde ist eine Scheibe' ist ein Satz, sein Inhalt sei eine Aussage, die wir mit dem Symbol p_k aus dem Vokabular $\mathbb{V}_\mathbb{S}$ kennzeichnen. Außerdem ist p_k eine Basisaussage aus der Systemgesamtheit $\mathbb{S}$; damit gilt:

$$p_k \rightleftharpoons \text{Aussage von ‚Die Erde ist eine Scheibe'}, \quad p_k \underset{\leftarrow}{\in} \mathbb{V}_\mathbb{S}, \quad p_k \in \mathbb{S}.$$

(c) Die Aussage ‚Die Erde ist eine Scheibe' hat einen (Wahrheits)wert; angenommen er sei noch unbekannt, so dass für in ebenfalls eine Variable benötigt wird. Wir wählen die Variable $\mathbf{p_k}$ aus dem Vokabular $\mathbb{V}_\mathbb{S}$. Die Variable $\mathbf{p_k}$ kann nur Werte aus dem Wertebereich $\mathbb{W}$ annehmen; damit ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\mathbf{p_k} \text{ Variable für den (Wahrheits)wert von } p_k; \quad \mathbf{p_k} \underset{\leftarrow}{\in} \mathbb{V}_\mathbb{P}, \quad \mathbf{p_k} \in \mathbb{W}.$$

(d) Ist der (Wahrheits)wert von p_k bekannt, so können wir ihn entweder der Variablen $\mathbf{p_k}$ direkt zuordnen und $\mathbf{p_k} = \mathit{falsch}$ schreiben, oder wir können für ihn zunächst nur das Symbol $\mathrm{w_k}$ aus $\mathbb{V}_\mathbb{W}$ vorsehen; damit gelten die Beziehungen

$$\mathrm{w_k} \underset{\leftarrow}{\in} \mathbb{V}_\mathbb{W}, \quad \mathbf{p_k} = \mathrm{w_k} \quad \text{und} \quad \mathrm{w_k} \in \mathbb{W}.$$

Über den Index k und durch Beibehalten des gleichen führenden Buchstabens – im obigen Beispiel ist es Buchstabe p – gelingt es, über alle Ebenen hinweg eine eindeutige Zuordnung zu erhalten.

3 Logische Grundbegriffe

Wir wenden uns nun denjenigen Begriffen zu, die traditionell als logische Grundbegriffe gelten. In der Literatur bezieht man sie ausschließlich auf Aussagen, man bleibt also bei ideellen Systemen. Im folgenden werden jedoch stets auch die materielle Systeme mit berücksichtigt, so dass sich der Übergang von einer Welt in die andere leicht nachvollziehen lässt.

3.1 mk – stelliger Junktor

Nicht alle Gedankenverbindungen sind „logisch“, sondern nur solche, die zu wohldefinierten Ergebnissen führen. Wohldefiniert heißt: es gibt bestimmte Rechenregeln, nach denen aus den Eingangswerten eindeutig die Ausgangswerte ermittelt werden können. Die Rechenregeln werden verkörpert durch Operatoren; die ideellen bezeichnet man als *Junktoren*, die materiellen als *Gatter*.

Definition: mk – stelliger Junktor/mk – stelliges Gatter

Sei $m = 1, 2, ..., M$ und $k = 1, 2, ..., K$. Ein mk – stelliger Junktor/ein mk – stelliges Gatter ist ein Logsystem, das die Werte aus m Eingangskanälen umwandelt in Werte für k Ausgangskanäle.

Für die Systemdarstellung eines Junktors/Gatters verwenden wir wie bei den Systemen ein Rechteck (Abbildung 12). Die Stelligkeit ergibt sich automatisch aus der Anzahl der Eingangskanäle.

Abbildung 12: mk - stelliger Junktor als Logsystem, das die Werte aus $m \geq 1$ Eingangskanälen umwandelt in Werte für $k \geq 1$ Ausgangskanäle.

Für ihre zeichensprachliche Darstellung verwenden wir die folgenden Vokabulare:

einstellige Gatter/Junktoren	$\mathbb{V}_{\sim} = \{\sim_1, \sim_2, ...\} / \mathbb{V}_{\approx} = \{\approx_1, \approx_2, ...\}$,
zweistellige Gatter/Junktoren	$\mathbb{V}_{\odot} = \{\odot_1, \odot_2, ...\} / \mathbb{V}_{\circledast} = \{\circledast_1, \circledast_2, ...\}$.

Hat der Junktor nur einen Ausgangskanal, ist also $k = 1$, so spricht man auch kurz von einem m – stelligen Junktor. Von besonderer Bedeutung sind ein- und zweistellige Junktoren. Dabei wirken einstellige auf einen Wert, während zweistellige zwei Werte miteinander verknüpfen.

Bei einem endlichen Definitions- und Wertebereich steht ferner die Anzahl der möglichen Junktoren fest, d.h. die Eigenschaften eines Logiksystems lassen sich eindeutig durch die Angabe der Wertetabellen definieren. Falls der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ gleich dem Wertebereich $\mathbb{W}$ und n die Anzahl ihrer Werte ist, lässt sich über die Formel

$$m = \left(n^{n^k}\right) \tag{1}$$

berechnen, wieviele verschiedene k-stellige Junktoren in dem zugehörigen Logsystem möglich sind. Die Zahl wächst mit steigender Anzahl der Werte sehr schnell an. So hat bereits der dreiwertige Logikkalkül $3^{3^2} = 27^2 = 729$ zweistellige Junktoren.

Bei $n = 2$ gibt es $2^{2^1} = 4$ einstellige So gibt es z.B. bei zwei Werten genau die vier einstelligen Junktoren

p	$f(p) = \approx_1 p$	$f(p) = \approx_2 p$	$f(p) = \approx_3 p$	$f(p) = \approx_4 p$
w_1	w_1	w_2	w_1	w_2
w_2	w_2	w_1	w_1	w_2;

eine andere Zuordnung ist nicht möglich. Es können also durch Wertetabellen stets alle möglichen Fälle erfasst werden (Tabelle 3).

Operation	p	w	f	Bezeichnung logische	technische	Symbol
$\approx_1 \mathbf{p}$		f	w	Negation	NOT	¬
$\approx_2 \mathbf{p}$		w	f	Transferfunktion, Identität	Buffer	÷
$\approx_3 \mathbf{p}$		w	w	Tautologie, Einsfunktion		◊
$\approx_4 \mathbf{p}$		f	f	Kontradiktion, Nullfunktion		#

Tabelle 3: Wertetabellen für alle einwertigen aussagenlogischen Junktoren.

Entsprechendes gilt für die $2^{2^2} = 16$ zweistellige Junktoren. So charakterisiert z.B. die Wertetabelle

p	q	$\mathbf{f(p,q) = p \circledast q}$
w_1	w_1	w_2
w_1	w_2	w_1
w_2	w_1	w_2
w_2	w_2	w_1

den Junktor ‚$\circledast$' vollständig; insgesamt gibt es 16 solcher Tabellen, welche alle 16 möglichen zweistelligen Junktoren im zweiwertigen System festlegen (Tabelle 4).

Operation	p q	w w	w f	f w	f f	Bezeichnung logische	technische	Symbol
$\mathbf{p} \circledast_1 \mathbf{q}$		w	w	w	w	Tautologie, Einsfunktion		◊
$\mathbf{p} \circledast_2 \mathbf{q}$		w	w	w	f	Alternative, Disjunktion (Oder)	OR	∨
$\mathbf{p} \circledast_3 \mathbf{q}$		w	w	f	w	Koimplikation, Replikation		←
$\mathbf{p} \circledast_4 \mathbf{q}$		w	w	f	f	Transferfunktion **p**	Buffer	÷
$\mathbf{p} \circledast_5 \mathbf{q}$		w	f	w	w	Implikation (wenn-dann)		→
$\mathbf{p} \circledast_6 \mathbf{q}$		w	f	w	f	Transferfunktion **q**	Buffer	÷
$\mathbf{p} \circledast_7 \mathbf{q}$		w	f	f	w	Äquivalenz	XNOR	↔
$\mathbf{p} \circledast_8 \mathbf{q}$		w	f	f	f	Konjunktion (und)	AND	∧
$\mathbf{p} \circledast_9 \mathbf{q}$		f	w	w	w	SHEFFER Strich	NAND	|, ↑
$\mathbf{p} \circledast_{10} \mathbf{q}$		f	w	w	f	Exklusives Oder, Autfunktion	XOR	Y
$\mathbf{p} \circledast_{11} \mathbf{q}$		f	w	f	w	Negation **q**	NOT	¬
$\mathbf{p} \circledast_{12} \mathbf{q}$		f	w	f	f	Inhibition (**q**, aber nicht **p**)		
$\mathbf{p} \circledast_{13} \mathbf{q}$		f	f	w	w	Negation **p**	NOT	¬
$\mathbf{p} \circledast_{14} \mathbf{q}$		f	f	w	f	Inhibition (**p**, aber nicht **q**)		
$\mathbf{p} \circledast_{15} \mathbf{q}$		f	f	f	w	NICOD Funktion (weder-noch)	NOR	↓
$\mathbf{p} \circledast_{16} \mathbf{q}$		f	f	f	f	Kontradiktion, Nullfunktion		#

Tabelle 4: Wertetabellen für alle zweiwertigen aussagenlogischen Junktoren.

Die Zeichen der Junktoren sind in der Logikliteratur nicht eindeutig. Tabelle 5 gibt einige Beispiele für andere Schreibweisen.

Operation	HILBERT	SCHOLZ	RUSSELL	KOLMOGOROW	ŁUKASIEWICZ
Negation	$\overline{\mathbf{p}}$	~**p**	~**p**	¬**p**	N
Konjunktion	&	∧	·	∧	K
Alternative	∨	∨	∨	∨	A
Implikation	→	→	⊃	⊃	C

Tabelle 5: Beispiele für unterschiedliche Symbolisierung der zweiwertigen Junktoren.

Neben der Tabellendarstellung besteht die Möglichkeit, die Junktoren durch Regeln oder über ein System von Axiomen einzuführen. Bei den Regeln handelt es sich lediglich um eine sprachliche Formulierung von dem, was in den Tabellen steht, z.B.

$\approx_1$ **p** ist wahr, wenn **p** falsch ist.

Wir können sie übergehen, denn sie bieten keine neuen Darstellungsaspekte. Bei der Einführung durch ein Axiomensystem werden die Axiome so gewählt, dass sie dann und nur dann gelten, wenn die in ihnen vorkommenden Junktoren die gewünschte zuvor festgelegte Eigenschaft haben. Auf diese Darstellung werden wir in einem späteren Teil zurückkommen.

Als Beispiel für Gatter, also für die materielle Darstellung der Junktoren, betrachten wir elektrische Kippschaltern, von denen wir annehmen, dass sie die beiden Zustände ‚an' (es fließt Strom) und ‚aus' (es fließt kein Strom) annehmen können. Da ihre physikalischen Bestandteile für die Logik ohne Bedeutung sind, interpretieren wir sie als Basislogsysteme. Dabei unterscheiden wir zwei Arten: Der normale Kippschalter (Abbildung 13), der bei geeigneter Wahl der Systemparameter die Identität (Ein- gleich Ausgangswert) und der inverse Kippschalter (Abbildung 14), der bei entsprechenden Systemparametern die Negation des Eingangswertes liefert.

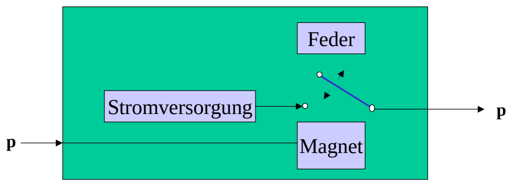

Abbildung 13: Schematische Darstellung eines elektrischen Kippschalters. Liefert der Eingangskanal einen hinreichend starken elektrischen Strom, dann zieht der Magnet den Kontakt nach unten und schließt den Stromkreis, so dass auch am Ausgang ein Strom fließt. Andernfalls bewirkt – wie in der Abbildung dargestellt – die nach oben ziehende Feder, dass der Kontakt unterbrochen und dadurch der Ausgang ohne Strom bleibt. Die Stromversorgung stellt einen wohldefinierten Ausgangsstrom sicher; man kann sie so einstellen, dass der Kippschalter die Identität (Ein- gleich Ausgangswert) physikalisch repräsentiert.

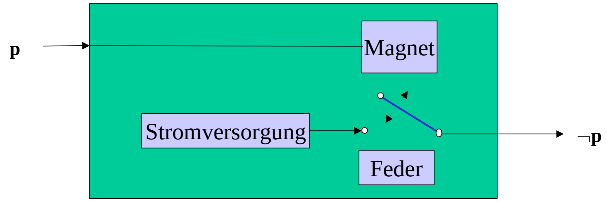

Abbildung 14: Schematische Darstellung eines inversen elektrischen Kippschalters. Im Unterschied zu dem in Abbildung 13 gezeigten wurden die Positionen von Magnet und Feder vertauscht. Dadurch bleibt – wie in der Abbildung dargestellt – der Stromkreis unterbrochen, wenn der Eingangsstrom so groß ist, dass der Magnet den Kontakt nach oben zieht. Im anderen Fall zieht die Feder den Kontakt nach unten und schließt den Stromkreis. Bei einer geeigneten Einstellung der Stromversorgung repräsentiert dieser Kippschalter die Negation des Eingangswertes.

Kippschalter repräsentieren einstellige Gatter; aber man kann aus ihnen leicht zweistellige machen, indem man die Stromversorgung nach außen verlagert und sie wie einen Eingangskanal behandelt. Für einen wohldefinierten Ausgangsstrom muss dann an anderer Stelle im System gesorgt werden.

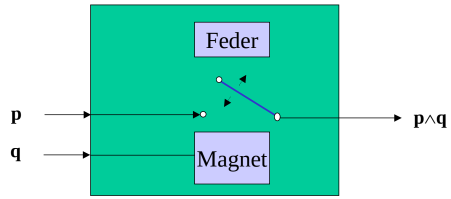

Abbildung 15: Schematische Darstellung eines zweistelligen UND-Gatters, das am Ausgang nur dann einen von Null verschiedenen Wert liefert, wenn beide Eingangsgrößen unter Strom stehen.

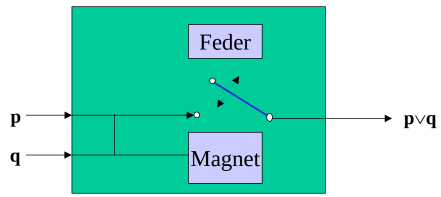

Abbildung 16: Schematische Darstellung eines zweistelligen ODER-Gatters, das am Ausgang nur dann Null liefert, wenn beide Eingangsgrößen nicht unter Strom stehen.

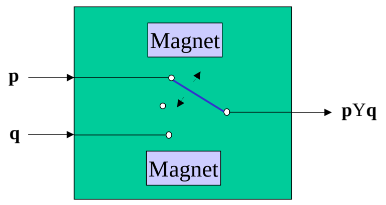

Abbildung 17: Schematische Darstellung eines zweistelligen EXKLUSIVES-ODER-Gatters, das am Ausgang nur dann Null liefert, wenn beide Eingangsgrößen gleich sind, denn dann neutralisieren sich bei einem hier nicht eingezeichneten Federmechanismus die Wirkungen der beiden Magneten.

Die Beispiele in den vorangegangenen Abbildungen zeigen, dass man die Gatter ganz unterschiedlich realisieren kann, je nach dem, welche physikalischen Elemente man miteinander verschaltet. Wir abstrahieren wiederum von der physikalischen Ebene und betrachten die ein- und zweistelligen Gatter als Basislogsysteme, oder, in kybernetischer Sprechweise, als schwarze Kästen, von denen nur die Eigenschaften der Ein- und Ausgänge bekannt sind.

3.2 Verknüpfung von Junktoren/Gatterschaltung

Junktoren/Gatter führen Operationen aus: sie wandeln Eingangswerte in Ausgangswerte um. Unter einer Verknüpfung von Junktoren bzw. einer Verschaltung von Gattern verstehen wir einen Verbund, der sich ergibt, wenn man bestimmte Ausgangskanäle eines Junktors/Gatters zu Eingangskanälen von anderen Junktoren/Gattern macht und gegebenenfalls mit deren Ausgangskanälen ebenso verfährt (Abbildung 18).

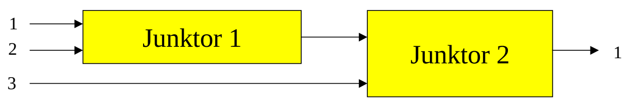

Abbildung 18: Dreistelliger Junktor aufgebaut aus zwei zweistelligen Junktoren.

Bislang wurden über die Definitions- und Wertebereiche noch keine Vereinbarungen getroffen. Wenn man jedoch Systeme miteinander verbinden möchte, muss der Wertebereich der vorausgehenden Junktoren/Gattern in den Definitionsbereichen der nachfolgenden liegen. Dies führt uns auf den Begriff einer abgeschlossenen Menge von Logsystemen. Sei $\mathbb{H}$ eine Menge von L Logsystemen realisiert als Gatter oder Junktoren; die zugehörigen Definitions- bzw. Wertebereiche seien $\mathbb{D}^1,\dots,\mathbb{D}^L$ und $\mathbb{W}^1,\dots,\mathbb{W}^L$.

Definition: Abgeschlossene Menge von Logsystemen

Die Menge der L Logsysteme in $\mathbb{H}$ heißt abgeschlossen, wenn für alle $i, j = 1, 2, \dots, L$ gilt: $\mathbb{W}^i \subseteq \mathbb{D}^j$.

Bilden die zu verknüpfenden Junktoren/zu verschaltenen Gatter eine abgeschlossene Menge, so liefern ihre Ausgangskanäle immer Werte, die als Eingangswerte bei anderen Systemen infragekommen. Bei Abgeschlossenheit führt somit die Verschaltung von Logsystemen auf allgemeine, in beliebiger Weise aus Logsystemen aufgebaute Systeme, die wiederum zu Teilsystemen eines umfassenderen Systems zusammengefasst werden können.

Satz 1: Abgeschlossenheit der Logsysteme

Sei $\mathbb{H}_0$ eine Menge von abgeschlossenen Logsystemen und $\mathbb{S}^{\mathbb{H}_0}$ die Menge aller Systeme, entstanden durch beliebige Verschaltungen der Logsysteme aus $\mathbb{H}_0$. Dann ist auch die Menge $\mathbb{S}^{\mathbb{H}_0}$ abgeschlossen.

Beweis:

Bei einer beliebigen Verschaltung von Logsystemen münden die Eingangskanäle stets in Logsystemen und die Ausgangskanäle stammen ebenfalls stets von Logsystemen, die nach Voraussetzung abgeschlossen sind. Also können die Definitions- und Wertebereiche durch eine Verschaltung nicht überschritten werden.

Wenn $\mathbb{H}_0$ eine Menge von abgeschlossenen Logsystemen ist, können die beiden Systemgesamtheiten $\mathbb{H}_0$ und $\mathbb{S}^{\mathbb{H}_0}$ zu einer Gesamtheit

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \cup \mathbb{S}^{\mathbb{H}_0}$$

zusammengefasst werden, deren Definitionsbereich $\mathbb{D}^{\mathbb{H}} = \mathbb{D}^{\mathbb{H}_0}$ und deren Wertebereich $\mathbb{W}^{\mathbb{H}} = \mathbb{W}^{\mathbb{H}_0}$ ist. Für die Logik sind nur Mengen von abgeschlossenen Logsystemen von Interesse; im folgenden werden daher nur solche Systeme betrachtet.

Selbst bei einer endlichen Zahl von Ein- und Ausgangskanälen kommt es zu einer großen Vielfalt von Junktoren/Gattern, so dass die Lage schnell unübersichtlich wird. Da solch eine Systemvielfalt nicht nur die Anwendung, sondern auch die theoretischen Arbeiten massiv behindern würde, ist es notwendig, sie in irgendeiner Weise einzuschränken. Es kommt hierfür nur eine Möglichkeit infrage: Man muss alle komplexen Logsysteme auf einige wenige elementare zurückführen.

Es zeigt sich nun, dass es möglich ist, durch eine geeignete Kombination von zweistelligen Logsystemen Logsysteme zu konstruieren, deren Stelligkeit größer ist als 2; Abbildung 18 liefert ein Beispiel, wie aus zwei zweistelligen Junktoren ein dreistelliger gemacht werden kann. Wir werden später sehen, dass sich alle k–stelligen Logsysteme mit $k > 2$ unter bestimmten Voraussetzungen auf eine Kombination von zweistelligen Logsystemen zurückführen lassen. Diese Eigenschaft ermöglicht eine erhebliche Vereinfachung der Logik. Aus traditionellen Gründen ergänzt man die zweistelligen Junktoren/Gatter noch durch einstellige, doch dies wäre nicht notwendig, denn wie aus Tabelle 4 ersichtlich, sind die einstelligen Spezialfälle der zweistelligen. Diejenigen ein- bzw. zweistelligen Junktoren/Gattern mit denn alle höherstelligen konstruiert werden können, entsprechen den Basislogsystemen.

3.3 Primlogsysteme

Die Eingangskanäle von einem Logsystem können von anderen Logsystemen stammen; da aber die Verschaltung von Systemen irgendwann abbrechen muss, fehlen den Eingangskanälen an vorderster Front die Systeme, von denen sie Werte beziehen. Das darf nicht sein: Ein Eingangskanal muss stets von einem System ausgehen; deswegen müssen solche freien Kanäle mit Primlogsystemen abgeschlossen werden, die nach Voraussetzung zwar Werte liefern, aber keine Eingangskanäle besitzen. In Abbildung 19 ist der Junktor $\circledast$ mit den Primlogsystemen p und q verbunden.

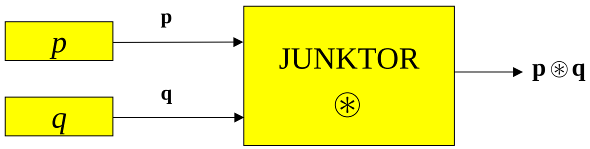

Abbildung 19: Junktor $\circledast$ verbunden mit den Primlogsystemen p und q, welche die Werte **p** bzw. **q** liefern. Durch diese Ankopplung liegt am Ausgangskanal des Junktors ebenfalls ein Wert an.

Es gibt verschiedene Arten von Primlogsystemen. Die in der Logik benutzten (ideellen) Primlogsysteme sind Primaussagen und Relationen.[13]

3.3.1 Primaussagen

Bei Primaussagen handelt es sich um Faktenwissen, von dem man annimmt, dass der zugehörige Wert bekannt ist oder durch außerlogische Mittel bestimmt werden kann. Beispiel:

Aussage von ‚Die Erde ist eine Scheibe'.

Eben weil der Wert außerlogisch zu ermitteln ist, hat eine Primaussage keine logischen Eingangskanäle. Eine Primaussage kann irgendeinen Wert aus dem Wertebereich haben, sie muss also insbesondere nicht notwendig wahr sein. Die den Primaussagen entsprechenden materiellen Primlogsysteme sind dadurch gekennzeichnet, dass sie zwar einen Ausgangskanal haben, in dem Werte des (logischen) Wertebereichs übertragen werden, bei denen aber entsprechende Eingangskanäle fehlen. Im Gegensatz zu ideellen Primsystemen beruhen materielle auf Energieumwandlungen, z.B. beim Auslesen eines Inhalts aus einem Speicher; sie haben daher zumindest einen Eingangskanal für die Energiezufuhr. Doch dieser überträgt keine logischen Größen, so dass man von ihm in der Logik abstrahieren kann. Der Ausgangskanal überträgt dann den aus dem Speicher gelesenen Wert.

[13] Die Primaussagen werden unter anderem auch als atomare Aussagen, die Relationen auch als Prädikate bezeichnet.

3.3.2 Relationen

Nun gibt es aber auch Systeme mit Eingangskanälen, die zwar ideelle Größen „übertragen“, bei denen es sich aber nicht um logische Werte handelt; bekanntestes Beispiel hierfür sind die Begriffe, die in Relationen als „Eingangswerte“ eingehen können. Relationen haben aber neben den Begriffen auch noch andere Arten von Eingangswerten, z.B. reelle Funktionen oder irgendwelche Daten. Diese Arten von Eingangswerten fassen wir unter dem Oberbegriff Objekt zusammen, wobei unter einem Objekt irgendein Ding verstanden wird, das kein Logsystem ist und mindestens einer Objektklasse angehört; letztere ist durch eine gewisse Menge von Objekten charakterisiert.

Definition: k-stellige Relation

Eine k-stellige *Relation* $\mathbf{r}(\mathcal{A}_{i_1 1}, \mathcal{A}_{i_2 2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_k k})$ setzt k Objekte ($k \geq 1$) miteinander in Beziehung. Dabei bezeichnet ‘$\mathcal{A}_{i_j j}$’ das Element i_j aus der Objektklasse $\mathbb{A}_j$ (j = 1, 2, …, k). Der Definitionsbereich einer k-stelligen Relation ist das kartesische Produkt

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2 \times \ldots \times \mathbb{A}_k,$$

ihr Wertebereich besteht aus einer Menge von logischen Werten $\mathbb{W}$.

Die Wertemenge könnte z.B. $\mathbb{W}$ = {trifft zu, trifft nicht zu, unbekannt} lauten. So trifft die zweistellige Relation ‘hat_Kind(Peter, Paul)’ zu, wenn Peter das Kind Paul hat; falls nicht, trifft sie nicht zu. Außerdem kann die Kindesbeziehung noch unbekannt sein. Die Objektklasse für diese Relation ist etwa die Klasse der Personen; ‘Peter’ and ‘Paul’ sind Elemente von ihr.

Eine Relation zeichnet sich dadurch aus, dass sie einen nichtlogischen Definitionsbereich und einen logischen Wertebereich hat. Aufgrund des letzteren können Relationen wie logische Aussagen, aufgrund der nichtlogischen Natur ihrer Eingangswerte können sie als spezielle Primaussagen betrachtet werden (Abbildung 20). Durch die Hinzunahme von Relationen und ihre Gleichstellung mit logischen Aussagen gewinnt der Formalismus beträchtlich an Ausdruckskraft.

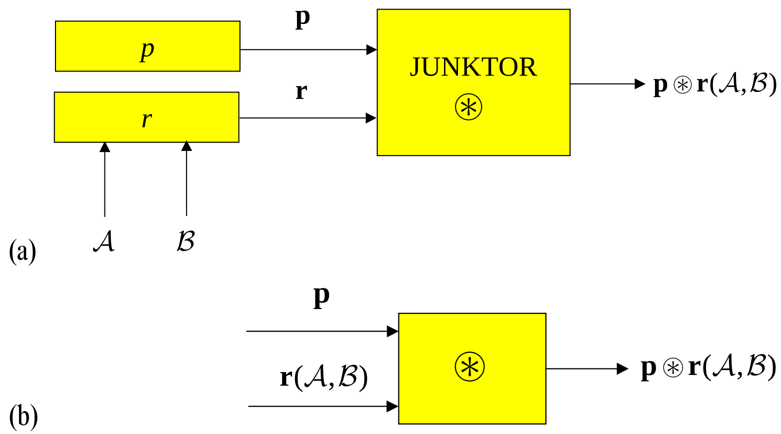

Abbildung 20: Junktor ⊛ verbunden mit einer Primaussage p und einer Relation r, welche die Werte $\mathbf{p}$ bzw. $\mathbf{r}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ liefern; Relationen werden wir Primaussagen behandelt. Abbildung (b) zeigt die Kurzform der Darstellung von Abbildung (a).

Um Verwechselungen mit logischen Entitäten zu vermeiden, führen wir und als Zeichenmenge für die Objektkonstanten das Vokabular

$$\mathbb{V}_{\mathbb{O}_\mathbb{K}} = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$$

und als Zeichenmenge für die Objektvariablen das Vokabular

$$\mathbb{V}_{\mathbb{O}} = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots\}$$

ein. Außerdem ergänzen wir das Vokabular für die Wertevariablen durch die Zeichenmenge für die Relationenvariablen und erhalten

$$\mathbb{V}_{\mathbb{W}} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots\}.$$

Bestehen die Argumente einer Relation ausschließlich aus Zeichen für Objektkonstanten, so werden damit stets Beziehungen zwischen individuellen Objekten ausgedrückt, auch wenn noch nicht bekannt ist, um welche es sich handelt. Relationen mit solchen Zeichen dienen dazu, Faktenwissen ganz unterschiedlicher Herkunft in einheitlicher Form zu repräsentieren.

So ist Faktenwissen inform von Relationen wie ‚$\mathcal{A}$ enthält_neben $\mathcal{B}$ auch $\mathcal{C}$' oder ‚$\mathcal{A}$ ist_Autor_von $\mathcal{B}$' direkt in relationalen Datenbanken abgelegt und kann über geeignete Zugriffsoperationen von dort ausgelesen und so für logische Systeme nutzbar gemacht werden.

Bei einer anderen Relationsart sind die Fakten nicht direkt verfügbar, sondern werden erst berechnet, d.h. die Rechenoperationen nehmen jetzt den Platz von Zugriffsoperationen ein. Ist etwa eine Funktion f und ein Zahlenintervall $\mathbb{I}$ gegeben, so wird beim Aufruf der Relation hat_Nullstelle(f, $\mathbb{I}$) berechnet, ob die Funktion f im angegebenen Intervall eine (oder mehrere) Nullstellen besitzt. Durch solche Operationen lassen sich beliebige mathematische Funktionen z.B. aus einer Funktionsbibliothek in logische Untersuchungen einbeziehen.

Bei einer weiteren Relationsart werden die Daten nicht von Datenbanken, sondern von Sensoren abgerufen. Ihr Haupteinsatzgebiet ist die Lösung von Steuerungsaufgaben, bei denen es darum geht, in Abhängigkeit von äußeren Bedingungen und gestützt auf das in einem logischen System enthaltene Wissen Schlussfolgerungen zu ziehen und das Ergebnis der Schlussfolgerungen mit Aktionen, z.B. an Entscheidungen zu knüpfen. Eine solche Relation wäre z.B. ist_größer_als(Drehzahlmesser, maximal zulässige Drehzahl). Hinter ‚Drehzahlmesser' verbirgt sich eine Sensorfunktion, die in diesem Beispiel die Aufgabe hat, die jeweils aktuelle Drehzahl festzustellen. Falls sie den Wert ‚wahr' liefert, wird man eine die Drehzahl senkende Aktion einleiten.

Die verschiedenen Relationsarten unterscheiden sich lediglich in ihren Wissensquellen; neben den oben angeführten sind auch noch andere Arten möglich. Für logische Untersuchungen ist es unerheblich, woher das Wissen stammt, so dass alle Arten in gleicher Weise behandelt werden können.

Das obige bezog sich auf Beziehungen zwischen Objektindividuen. Erscheinen in den Argumenten einer Relation Zeichen von Objekt*variablen*, so ist damit gemeint, dass die Relation auf alle Objekte aus den zugehörigen Objektklassen zutrifft; nach Vereinbarung gilt somit z.B.

(2) $$\mathbf{r}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) =_{def} \forall x \forall y\ r(x,y) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}(\mathcal{A},\mathcal{B}) =_{def} r(a,b)\,;$$

die rechte Seite stellt dabei jeweils die prädikatenlogische Schreibweise dar. Mit Hilfe von Relationen lassen sich auf diese Weise prädikatenlogische Ausdrücke bilden; wir werden in einem späteren Teil ausführlich darauf eingehen.

3.4 Vokabulare

Im Verlaufe der Begriffsklärung ergaben sich mehrere Zeichenserien, die im folgenden noch einmal kurz zusammengestellt werden. Es sei bereits an dieser Stelle nachdrücklich darauf hingewiesen, dass allein schon durch die Wahl der Zeichen bestimmte Inhalte ausgedrückt werden. Zwar ist es zunächst gleichgültig, welche Zeichen man für welchen Zweck auswählt, aber nach der Wahl liegt ihr Verwendungszweck und somit ihre Bedeutung fest.

Die Zeichen lassen sich in drei Vokabularien gruppieren, und zwar jeweils ein Vokabular für Variablen, für Konstanten und für Daten. Technische Zeichen bleiben unberücksichtigt.

Vokabulare für Variablen

Texturvariable:
$\mathbb{V}_{\mathbb{T}} = \{P, Q, X, Y, Z, \ldots, P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots\}$

Systemvariable: $\mathbb{V}_{\mathbb{S}} = \{p, q, r, x, y, z, \ldots x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots\}$

Wertevariable: $\mathbb{V}_{\mathbb{W}} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots\}$

Objektvariable: $\mathbb{V}_{\mathbb{O}} = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots\}$

Einstellige Gatter: $\mathbb{V}_{\sim} = \{\sim_1, \sim_2, \ldots\}$

Zweistellige Gatter: $\mathbb{V}_{\odot} = \{\odot_1, \odot_2, \ldots\}$

Einstellige Junktoren: $\mathbb{V}_{\approx} = \{\approx_1, \approx_2, \ldots\}$

Zweistellige Junktoren: $\mathbb{V}_{\circledast} = \{\circledast_1, \circledast_2, \ldots\}$

Vokabulare für Konstanten

Texturkonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{T}_\mathbb{K}} = \{A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots\}$

Systemkonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{S}_\mathbb{K}} = \{a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots\}$

Wertekonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{W}_\mathbb{K}} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots\}$

Objektkonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{O}_\mathbb{K}} = \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$

Einstellige Junktoren: $\mathbb{V}_{\approx_\mathbb{K}} = \{\neg, \div\}$, (Auswahl)

Zweistellige Junktoren: $\mathbb{V}_{\circledast_\mathbb{K}} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \uparrow, \downarrow, \mathrm{Y}\}$ (Auswahl)

Funktionenkonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{F}_\mathbb{K}} = \{\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \ldots, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots\}$

Relationenkonstante: $\mathbb{V}_{\mathbb{R}_\mathbb{K}} = \{\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots\}$

Vokabulare für Daten

Definitionsbereich: $\mathbb{V}_{\mathbb{D}_\mathbb{B}} = \{\mathrm{f}, \mathrm{w}, \mathrm{u}\}$ (Auswahl)

Wertebereich: $\mathbb{V}_{\mathbb{W}_\mathbb{B}} = \{\mathrm{f}, \mathrm{w}, \mathrm{u}\}$ (Auswahl)

Tabelle 6: Vokabulare für die Variablen, Konstanten und Daten.

3.5 Gleichheitsbeziehungen

Bei Logikanwendungen kommen häufig Gleichheitsaussagen vor; sie werden sprachlich erfasst durch Gleichsetzen von logischen Ausdrücken, ausgedrückt durch Gleichungen. Wie in der Mathematik, so unterscheiden wir auch hier drei Fälle: Identische Gleichungen, sie werden für jeden Wert der in ihnen vorkommenden Größen befriedigt; Funktionsgleichungen, sie stellen Gleichungen zwischen veränderlichen Größen dar und schließlich Bestimmungsgleichungen, die nur durch bestimmte Werte, den Lösungen der Gleichung, befriedigt werden. Für alle drei Arten verwenden wir das normale Gleichheitszeichen ‚=‘; es bezieht sich auf die Gleichheit von Werten. Ob die Gleichheit von Werten oder z.B. von Mengen gemeint ist, geht aus dem Buchstabentyp hervor, der für die betreffende Entität vorgesehen ist. Für Zeichenketten benötigt man keine Gleichheitsrelation, da zwei verschiedene Zeichenketten von der Sache her niemals gleich sein können, und zwei gleiche Zeichenketten sind immer gleich.

Gilt zwischen zwei Entitäten die Gleichheit, so können sie wechselseitig füreinander stehen, insbesondere kann die eine durch die andere an beliebiger Stelle ersetzt werden.

Neben der herkömmlichen Gleichheitsrelation benötigen wir noch zwei weitere. Die eine wurde bereits gelegentlich verwendet und bezieht sich auf die Abkürzung von Zeichenketten. Hier wird die Gleichheit zwischen dem abkürzendem Zeichen und der abzukürzenden Zeichenketten definitorisch festgelegt; wir verwenden für sie das Gleichheitszeichen ‚$=_{\mathrm{abk}}$‘, z.B.

S $=_{abk}$ Helium ist ein Edelgas,

(3) $$\mathbf{x} =_{abk} \approx_{\alpha_1} [\approx_a \mathbf{p} \circledast_{\beta_1} (\mathbf{p} \circledast_{\beta} \mathbf{q})].$$

Im ersten Fall wird der Satz ‚Helium ist ein Edelgas‘ durch das Zeichen ‚S‘ abgekürzt, entsprechend steht im zweiten Fall **x** für den Ausdruck $\approx_{\alpha_1} [\approx_a \mathbf{p} \circledast_{\beta_1} (\mathbf{p} \circledast_{\beta} \mathbf{q})]$.

Bei einer Abkürzung gehen alle Eigenschaften des abgekürzten Ausdrucks auf das abkürzende Zeichen über: Zeichen S sagt somit das Gleiche aus wie ‚Helium ist ein Edelgas‘ und **x** hat den gleichen Wert wie der zugeordnete logische Ausdruck. Aus diesem Grund darf auch bei Abkürzungsgleichheit an jeder Stelle der fragliche Ausdruck durch sein abkürzendes Zeichen ersetzt werden. Im Unterschied aber zu einer normalen Gleichung wie $\mathbf{x} = \approx_{\alpha_1} [\approx_a \mathbf{p} \circledast_{\beta_1} (\mathbf{p} \circledast_\beta \mathbf{q})]$ darf eine Abkürzungsgleichung nicht in Operationen einbezogen werden, die ansonsten für den abgekürzten Ausdruck erlaubt sind; man darf also z.B. Gleichung (3) nicht durchmultiplizieren.

Mit einer weiteren durch ‚$=_T$' gekennzeichneten Gleichheitsrelation drücken wir einen Darstellungswechsel aus, z.B. den zwischen junktorieller und arithmetischer Darstellung. Da in den zwei Darstellungen im allgemeinen unterschiedliche Werte vorkommen, besteht genau genommen keine Wertegleichheit mehr. Da wir es aber mit äquivalenten Darstellungen zutun haben, bei denen zwischen den beiden Wertearten eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht, handelt es sich im übertragenen Sinn doch um eine Gleichheit. So entspricht, wie im zweiten Teil gezeigt wird, die junktorielle Konjunktion der Multiplikation; diesen Sachverhalt beschreiben wir durch

$$\underbrace{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}_{\mathbf{w,f}} =_T \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{0,1}.$$

Es sei angemerkt, dass die hier angeführten Gleichheitsrelationen sich in ihren formalen Eigenschaften unterscheiden können. So gilt für ‚$=_T$' die Identität nicht: $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} =_T \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ ergibt ebenso wenig Sinn wie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =_T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

4 Formalsprachliche Darstellung

In Abbildung 13 bis Abbildung 17 wurden die Gatter durch Schaltbilder, d.h. durch Texturen beschrieben. Dieser Darstellung lässt sich zwar leicht die Funktionsweise entnehmen, aber sie eignet sich nicht für formalsprachliche Operationen. Dazu muss der in einer Textur erfasste Sachverhalt erst in eine zeichensprachliche Form gebracht werden. Hierfür stehen logische Ausdrücke, $k-$ stellige logische Funktionen und Urteile zur Verfügung.

4.1 Logische Ausdrücke

Verknüpfungen von Aussagen werden durch logische Ausdrücke beschrieben. Sei

$$\mathbb{J} = \{\approx_1, \approx_2, ..., \approx_{n_\mathbb{I}};\ \circledast_1, \circledast_2, ..., \circledast_{n_\mathbb{J}}\}\ \ (n_\mathbb{I} \geq 1,\ n_\mathbb{J} \geq 1)$$

eine abgeschlossene Menge von ein- und zweistelligen Junktoren. Es gelte:

(4) $\mathbf{s} = \approx_\alpha \mathbf{p},\quad \mathbf{p} \in \mathbb{D},\ \mathbf{s} \in \mathbb{W},\ \approx_\alpha \in \mathbb{J}$,

(5) $\mathbf{t} = \mathbf{p} \circledast_\beta \mathbf{q},\quad \mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{D},\ \mathbf{t} \in \mathbb{W},\ \circledast_\beta \in \mathbb{J}$;

p und **q** sowie **s** und **t** sind Variablen für Werte, erstere aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$, letztere aus dem Wertebereich $\mathbb{W}$. Sind die Werte von **p** bzw. **p** und **q** bekannt, so lässt sich daraus der Wert für **s** bzw. **t** berechnen. Wir haben hier eine ganz ähnliche Situation wie bei herkömmlichen arithmetischen Operationen. Eine einstellige Operation ist z.B. der Vorzeichenwechsel $c = -a$ oder das Wurzelziehen $c = \sqrt{a}$, eine zweistellige die Addition $c = a + b$. Aus den Werten von a und b folgt unmittelbar der Wert von c, vorausgesetzt, man kennt die Bedeutung der Operationszeichen.

Da nach Voraussetzung die Menge der Junktoren abgeschlossen ist, dürfen die logische Verknüpfungen Teil weiterer Verknüpfungen sein. So kann man die in den Gleichungen (4) und (5) definierten Größen **s** und **t** etwa durch

$$\mathbf{x} = \approx_{\alpha_1} (\mathbf{s} \circledast_{\beta_1} \mathbf{t}),\quad \mathbf{s},\mathbf{t} \in \mathbb{D},\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{W},\ \approx_{\alpha_1}, \circledast_{\beta_1} \in \mathbb{J}$$

miteinander verbinden. Setzt man **s** und **t** aus den Gleichungen (4) und (5) ein, so ergibt sich

(6) $\mathbf{x} = \approx_{\alpha_1} [\approx_a \mathbf{p} \circledast_{\beta_1} (\mathbf{p} \circledast_\beta \mathbf{q})]$.

Zeichenketten der Form $\approx_{\alpha_1} [\approx_a \mathbf{p} \circledast_{\beta_1} (\mathbf{p} \circledast_\beta \mathbf{q})]$ heißen logische Ausdrücke. Nicht jede Kombination logischer Zeichen ist jedoch sinnvoll, d.h. stellt einen logischen Ausdruck, oder, wie man auch sagen kann, eine wohlformulierte Formel dar.[14] Die Menge der wohlformulierten Formeln eines Logiksystems bilden eine formale Sprache; ihre Grammatik wird meist umgangssprachlich festgelegt durch die folgende

[14] Manchmal abgekürzt durch ‚wff'.

Induktive Definition: Logischer Ausdruck

Gegeben sei das Konstantenvokabular $\mathbb{V}_{\mathbb{D}_\mathbb{B}}$ für den Definitionsbereich und das Vokabular $\mathbb{V}_\mathbb{W}$, das alle zulässigen Wertevariablen enthält. Dann gilt:

(a) z ist ein Ausdruck, wenn $\mathbf{z} \in \mathbb{V}_{\mathbb{D}_\mathbb{B}}$ oder $\mathbf{z} \in \mathbb{V}_\mathbb{W}$.

(b) Ist z ein Ausdruck, dann ist es auch $\approx$ z, wobei $\approx$ ein einstelliger Junktor ist.

(c) Sind z_1 und z_2 Ausdrücke, so ist auch $\mathbf{z_1} \circledast \mathbf{z_2}$ ein Ausdruck, wobei $\circledast$ ein zweistelliger Junktor ist.

(d) Ist z ein Ausdruck, dann sind auch (z), [z], {z} Ausdrücke.

(e) Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn das aufgrund der Regeln (a) – (d) der Fall ist.

Um die Reihenfolge der Operationen festzulegen oder auch nur, um die Ausdrücke lesbarer zu machen, erlaubt Regel (d) in bekannter Weise den Gebrauch von Klammern.

Gestützt auf die Vokabulare

$$\mathbb{V}_\mathbb{W} = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}\}$$

$$\mathbb{J}_1 = \{\approx_1, \approx_2, \ldots, \approx_{n_{\mathbb{J}_1}}\} \quad n_{\mathbb{J}_1} \geq 1,$$

$$\mathbb{J}_2 = \{\circledast_1, \circledast_2, \ldots, \circledast_{n_{\mathbb{J}_2}}\} \quad n_{\mathbb{J}_2} \geq 1$$

$$\mathbb{V}_{\text{technische Zeichen}} = \{(,\ ),\ [,\ ],\ \{,\ \}\}$$

lässt sich die induktive Definition unmittelbar in die reguläre Grammatik

$$G_{logischer\ Ausdruck} = < \mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}}, \mathbb{V}_{\text{Terminale}}, S, \mathbb{R} >$$

übertragen, wobei

$\mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}} = \{S, Z\}$,

$\mathbb{V}_{\text{Terminale}} = \mathbb{V}_\mathbb{W} \cup \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2 \cup \mathbb{V}_{\text{technische Zeichen}}$

$S \in \mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}}$ ist das Startsymbol und steht für ‚logischer Ausdruck'

$\mathbb{R}$ ist die Regelmenge

(1)	$S \Rightarrow \mathbf{p_i} \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_\mathbb{W}$,
(2)	$S \Rightarrow Z$,
(3a – 3c)	$Z \Rightarrow (Z) \mid [Z] \mid \{Z\}$
(4)	$Z \Rightarrow \approx_j Z \quad \approx_j \in \mathbb{J}_1$
(5a – 5b)	$Z \Rightarrow \mathbf{p_i} \circledast_j Z \mid Z \circledast_j \mathbf{p_i} \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_\mathbb{W}, \circledast_j \in \mathbb{J}_2$
(6)	$Z \Rightarrow \mathbf{p_i} \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_\mathbb{W}$

Beispiel: Es ist der Ausdruck $\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (\mathbf{p_2} \vee \mathbf{p_3})]$ aus der Grammatik G zu erzeugen. Für diesen Fall ist $\mathbb{V}_\mathbb{W} = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}\}$, $\mathbb{J}_1 = \{\neg\}$, $\mathbb{J}_2 = \{\rightarrow, \vee\}$ und $\mathbb{V}_{\text{technische Zeichen}} = \{(,\ ),\ [,\ ]\}$. Im folgenden werden die Herleitungsschritte angegeben; links erscheint jeweils die Nummer der verwendeten Regel.

(2)	Z
(4)	$\neg Z$
(3b)	$\neg[Z]$
(5a)	$\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow Z]$
(3a)	$\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (Z)]$
(5a)	$\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (\mathbf{p_2} \vee Z)]$
(6)	$\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (\mathbf{p_2} \vee \mathbf{p_3})]$.

Eine Zeichenkette ist danach ein logischer Ausdruck, wenn sie hinsichtlich der Grammatik für logische Ausdrücke grammatisch korrekt ist. Die Grammatik $G_{logischer\ Ausdruck}$ ist regulär, d.h. man kann für jede Zeichenkette stets in endlich vielen Schritten entscheiden, ob sie grammatisch korrekt ist oder nicht. Dies kann sowohl wie im obigen Beispiel „top-down“, also vom Startsymbol S zur fraglichen Zeichenkette oder von letzterer „bottom-up“ zum Startsymbol S geschehen.

Die über die Grammatik $G_{logischer\ Ausdruck}$ eingeführte Schreibweise ist leicht lesbar, solange sich die Klammern nicht häufen. Für Ausdrücke, in denen zahlreiche Klammern erforderlich wären, wurden spezielle Klammerersparnisregeln eingeführt; sie legen z.B. eine Rangordnung der Junktoren fest (was der Punktrechnung vor Strichrechnung der Arithmetik entspricht), oder sie führen Punkte um die Junktorzeichen ein, wobei jetzt die Anzahl der Punkte die Rangfolge bestimmt. Oft wird die Negation eines Ausdruckes durch einen durchgehenden Strich über diesen Ausdruck dargestellt.[15] Durch solche Maßnahmen lassen sich zwar Klammern einsparen, aber kaum die Lesbarkeit erhöhen, da nun anstelle der Klammern die Punkte gezählt werden müssen. Es ist daher ratsamer, die Schreibweise der Grammatik $G_{logischer\ Ausdruck}$ zu übernehmen und gegebenenfalls durch geeignete Abkürzungen die Lesbarkeit zu verbessern.

ŁUKASIEWICZ hat eine nach ihm benannte Schreibweise eingeführt, die auch als ‚polnische Notation' bezeichnet wird. Sie kommt ohne Klammern aus und lässt sich über die Vokabulare

$$\mathbb{V}_{\mathbb{W}} = \{\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}\}$$
$$\mathbb{J}_1 = \{\mathrm{N}\,(\neg)\}\ ,$$
$$\mathbb{J}_2 = \{\mathrm{K}\,(\wedge), \mathrm{A}\,(\vee), \mathrm{C}\,(\rightarrow), \mathrm{E}\,(\leftrightarrow)\}$$

durch die reguläre Grammatik

$$G_L = <\mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}}, \mathbb{V}_{\text{Terminale}_L}, S, \mathbb{R}_{\mathbb{L}}>$$

charakterisieren, wobei

$\mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}} = \{S, Z\}$,

$\mathbb{V}_{\text{Terminale}} = \mathbb{V}_{\mathbb{W}} \cup \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2$

$S \in \mathbb{V}_{\text{Nichtterminale}}$ ist das Startsymbol und steht für ‚logischer Ausdruck'

$\mathbb{R}$ ist die Regelmenge

(1) $S \Rightarrow \mathbf{p_i} \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_{\mathbb{W}}$,

(2) $S \Rightarrow Z$,

(3) $Z \Rightarrow \mathrm{N}Z$

(4a – 4d) $Z \Rightarrow \mathrm{K}\mathbf{p_i}\,Z \mid \mathrm{A}\mathbf{p_i}\,Z \mid \mathrm{C}\mathbf{p_i}\,Z \mid \mathrm{E}\mathbf{p_i}\,Z \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_{\mathbb{W}}$

(5) $Z \Rightarrow \mathbf{p_i} \quad \mathbf{p_i} \in \mathbb{V}_{\mathbb{W}}$.

In $\mathbb{J}_1$ und $\mathbb{J}_2$ wurde jeweils in Klammern die bekannte Junktorenschreibweise hinzugefügt.

[15] Z.B. ASSER (1972): *Einführung in die mathematische Logik*, I, p. 16f.

Beispiel: Es ist der Ausdruck $\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (\mathbf{p_2} \vee \mathbf{p_3})]$ aus der Grammatik G_L zu erzeugen. Die jeweils durch die Nummer der verwendeten Regel gekennzeichneten Herleitungsschritte sind:

(2) Z

(3) $\mathrm{N}Z$

(4c) $\mathrm{NC}\mathbf{p_1}Z$

(4b) $\mathrm{NC}\mathbf{p_1}\mathrm{A}\mathbf{p_2}Z$

(5) $\mathrm{NC}\mathbf{p_1}\mathrm{A}\mathbf{p_2}\mathbf{p_3}$.

Diese klammerfreie Schreibweise ist zwar sehr kompakt, aber sie wird eigentlich nur dann lesbar, wenn man sich die einzelnen Terme durch Klammern abgeteilt denkt oder sogar wieder Klammern einführt. Die Systemschreibweise (Abbildung 21) ist ebenfalls klammerfrei; verglichen mit den logischen Schreibweisen ist sie aber auch noch bei umfangreichen Ausdrücken leicht verständlich, denn die Verknüpfungen können unmittelbar nachvollzogen werden.

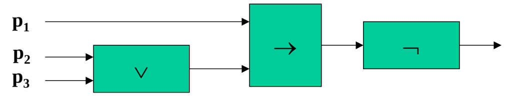

Abbildung 21: Klammerfreie Systemschreibweise für den Ausdruck $\neg[\mathbf{p_1} \rightarrow (\mathbf{p_2} \vee \mathbf{p_3})]$.

Sowohl in der ŁUKASIEWICZ als auch in der Systemschreibweise lässt sich immer in endlich vielen Schritten entscheiden, ob eine Zeichenkette ein logischer Ausdruck ist oder nicht. Umgekehrt kann jeder logische Ausdruck in traditioneller Darstellung stets in die beiden klammerfreien Darstellungen umgeformt werden; für technische Anwendungen bedeutet dies: Schaltung und logischer Ausdruck können wechselseitig ineinander umgeformt werden, insbesondere kann jeder logische Ausdruck durch eine Schaltung realisiert werden.

4.2 Logische Funktionen

Logische Funktionen werden wir – ebenfalls dem mathematischen Vorbild folgend – mit Hilfe von logischen Ausdrücke einführen:[16]

Definition: k – stellige logische Funktion

Eine k – stellige logische Funktion f mit $k = 1, 2, \ldots$, dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$ ist eine Vorschrift, die jedem k - Tupel $(d_1, d_2, \ldots, d_k) \in \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}}_{k-\text{faches kartesisches Produkt}}$ einen Wert $w \in \mathbb{W}$ zuordnet. Die Zuordnungsvorschriften werden durch logische Ausdrücke beschrieben.

Für die logischen Funktionen übernehmen wir die in der Mathematik übliche Schreibweise. So lautet z.B. die Gleichung (6) in Funktionsschreibweise

$$\mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = \approx_\alpha [(\mathbf{p} \circledast_\beta \mathbf{q}) \circledast_{\beta_1} \mathbf{s}].$$

Die Anzahl der unabhängigen Variablen ist bei logischen Funktionen grundsätzlich nicht beschränkt. Falls Definitions- und Wertebereich endlich sind, lässt sich jede logische Funktion eindeutig durch eine Wertetabelle charakterisieren; das gilt auch für Funktionen, deren Bereiche mehr als zwei Werte enthalten. Zwar werden die Tabellen mit wachsender Stellenzahl schnell sehr groß und somit unhandlich, so dass man nach einer alternativen Charakterisierung Ausschau halten muss, aber prinzipiell ist die Darstellung durch eine Wertetabelle immer möglich.

Gegeben sei eine k – stellige Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_k})$; ihr Definitionsbereich sei

$$\mathbb{D}^k = \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}}_{k-\text{faches kartesisches Produkt}}$$

und ihr Wertebereich $\mathbb{D}$. Nach Voraussetzung ordnet die Funktion f jedem k – Tupel

$$(w_1, w_2, \ldots, w_k) \in \mathbb{D}^k$$

einem Wert aus dem Wertebereich $\mathbb{D}$ zu. Solch ein k – Tupel stellt eine bestimmte Belegung der Variablen $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_k}$ dar. Oft ist es wünschenswert, mehrere solcher Tupel zusammenzufassen, z.B. weil sie den gleichen Funktionswert liefern. Deshalb führen wir den Begriff ‚Belegung' als Menge von Tupeln:

Definition: Belegung

Eine Belegung $\mathbb{B}^k$ der k Eingangsvariablen $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_k}$ für eine k – stellige logische Funktion f mit dem zugehörigen Definitionsbereich $\mathbb{D}^k = \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}}_{k-\text{faches kartesisches Produkt}}$ ist eine wohldefinierte Menge von k -Tupel mit $\mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k$.

Im Spezialfall enthält eine Belegung nur einen Tupel. Liefert die Funktion f für eine bestimmte Belegung $\mathbb{B}^k$ immer den gleichen Wert w, so schreiben wir dafür kurz $\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = w$; liefert sie ihn für alle möglichen Tupel, so schreiben wir $\mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = w$.

4.3 Elementarurteil, Urteil und Fehlurteil

Wissenschaftliche Arbeit besteht zu einem überwiegenden Teil darin, Sachverhalte zu erkennen, oder, wie wir auch sagen können, den (Wahrheits)wert von Aussagen zu finden. Durch die abschließende Beurteilung einer Aussage wird entschieden, welcher Wert ihr zukommen soll. Im einfachsten Fall bedeutet urteilen, einer Primaussage einen Wert zuordnen; das Ergebnis solch einer Zuordnung ist ein Elementarurteil:

Definition: Elementarurteil

Ein Elementarurteil ist ein Urteil, bei dem der Wertevariablen $\mathbf{p}$ von einer Primaussage p ein ganz bestimmter Wert w aus dem Wertebereich zugewiesen wird: $\mathbf{p} = w$, $w \in \mathbb{D} = \mathbb{W}$.

[16] Funktionen in der Logik werden oft auch als *Aussageformen* bezeichnet.

Beispiel:

Primaussage p: Die Erde ist eine Scheibe.
Elementarurteil $\mathbf{p} = \mathrm{f}$.

‚Zuordnen' ist hier ganz allgemein zu verstehen; so kann sich z.B. der Wert aus einem Experiment oder durch eine Berechnung ergeben haben, er kann aber auch nur auf Erfahrung oder einer Vermutung beruhen. Wie der Wert w zustandekam, ist für die Logik unerheblich, denn er wurde außerlogisch gewonnen. Allerdings besteht die Möglichkeit, aus mehreren Urteilen mit rein rechnerischen (also rein logischen) Mitteln bestimmte neue Urteile zu ermitteln. Wir werden diese Möglichkeit in Zusammenhang mit Schlussfolgerungen später ausführlich behandeln.

Der obige Spezialfall lässt sich verallgemeinern, indem man nicht nur Primaussagen, sondern auch beliebigen logischen Funktionen Werte zuweist. Die Zuweisung erfolgt über eine Zuordnungsgleichung, die als ‚Urteil' bezeichnet wird:

Definition: k – stelliges Urteil

Gegeben sei die k – stellige logische Funktion f; ihr Definitionsbereich sei $\mathbb{D}^k$ und ihr Wertebereich $\mathbb{W}$. Bei einem k – stelligen Urteil wird einer für eine bestimmte Belegung $\mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k$ aus ihrem ein Wert w aus ihrem zugeordnet; ein Urteil hat die Form einer Zuordnungsgleichung.

$$(7) \qquad \underbrace{\underbrace{\mathbf{f}(\mathbb{B}^k)}_{\textit{Logische Funktion}} \underbrace{= \mathrm{w}}_{\textit{urteilen}}}_{\textit{Urteil}} \qquad \mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k,\ \mathrm{w} \in \mathbb{W},$$

Dass auf der einen Seite der Zuordnungsgleichung jeweils nur eine Konstante steht, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn eine Zuordnung $\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2$ lässt sich z.B. über das exklusive Oder durch $\underbrace{\mathbf{f}_1 \veebar \mathbf{f}_2}_{\mathbf{f}} = \mathit{falsch}$ immer auf die obige Form bringen. Die Gleichsetzung zweier Funktionen für eine bestimmte Belegung ist demnach ebenfalls ein Urteil.

Ein Urteil kann selbst als eine Aussage aufgefasst werden, die entweder wahr oder falsch ist und die somit das weitere Urteil

$$[\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}) = \mathrm{w}_1] = \mathrm{w}_2, \quad \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k} \in \mathbb{D},\ \mathrm{w}_1 \in \mathbb{W},\ \mathrm{w}_2 \in \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\},$$

etwa 'es ist wahr (= w_2), dass **p** unbekannt (= w_1) ist', nach sich zieht und dieses wiederum ein weiteres – ad infinitum. Da aber durch solch eine Urteilskette nichts Neues ausgesagt wird, schneidet man sie ab durch die Vereinbarung

$$(8) \qquad [\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}) = \mathrm{w}_1] = \mathrm{w}, \quad \mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k} \in \mathbb{D},\ \mathrm{w}_1 \in \mathbb{W},$$

d.h. nach Vereinbarung ist ein Urteil immer eine wahre Aussage, so dass die Angabe, dass es wahr ist und damit eine weitere Beurteilung entfällt. Bei der Beurteilung selbst kann natürlich irgendein Wert aus dem betreffenden Wertebereich infragekommen.

Die Zuordnung (7) einerseits und andererseits der Verzicht auf Urteile mit zwei und mehr Stufen, oder anders formuliert: die unausgesprochene Vereinbarung (8), die zum Abbrechen berechtigt, erscheint vielleicht als inkonsequent oder sogar als willkürlich. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass dies genau die in den Wissenschaften vertretene Auffassung ist. Das Zerfallsgesetz z.B. lautet

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0;$$

Es besagt, dass die Anzahl der noch nicht zerfallenen Teilchen zum Zeitpunkt t tatsächlich $N(t)$ ist, wie aus der Formel berechnet werden kann. Man meint also, obwohl an keiner Stelle explizit ausgesprochen,

$$\left(N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}\right) = w,$$

in Übereinstimmung mit Urteil (8). Solche Gesetze sind meist für reelle Zahlen definiert; im Gegensatz dazu beziehen sich junktorenlogische Urteile auf (Wahrheits)werte. Das Weglassen von '$= w$' am Ende von $[\mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}) = \mathrm{w}_1] = w$ erscheint wohl deswegen als willkürlich oder inkonsequent, weil man an eine Fortsetzung glaubt, ein Gefühl, das bei Gleichungen mit reellen Zahlen offenbar nicht entsteht.

Ein Fehlurteil entsteht, wenn einer Primaussage oder einer logischen Funktion ein falscher Wert zugewiesen wird. Das wäre z.B. der Fall, wenn man die Primaussage ‚Die Erde ist eine Scheibe' als wahr beurteilte. Mit der Vereinbarung (8) wird die Möglichkeit von Fehlurteilen nicht ausgeschlossen. Wie man Fehlurteile erkennen kann und welche Schutzvorrichtungen es gegen sie gibt, gehört zu einem Problemkreis, bei dem es vor allem um Methoden geht, mit denen sich der Wert einer Aussage berechnen lässt. Wir werden an späterer Stelle auf diese Thematik zurückkommen.

4.4 Analytisches Gesetz, positive/negative Tautologie, Neutralität

Unter einem Gesetz verstehen wir eine beweisbare Aussage. Damit jedoch eine Aussage beweisbar ist, muss die Bedeutung der Junktoren bekannt sein. Diese kann über Wertetabellen, aber auch über Axiome eingeführt werden. Axiome sind demnach Gesetze per Festlegung und damit nicht beweisbar. *In der Logik treten Axiome somit nur dann auf, wenn die Bedeutung der in ihnen vorkommenden Junktoren noch nicht bekannt ist.*[17]

Eine besondere Stellung kommt Urteilen zu, die aufgrund ihrer Form immer einen ausgezeichneten (Wahrheits)wert besitzen; sie werden als ‚analytische Gesetze'[18]:

Definition: Analytisches Gesetz

Eine $k-$ stellige Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$ ist ein analytisches Gesetz, (1) wenn die Bedeutung der in f vorkommenden Junktoren bekannt ist und (2) wenn sie für alle möglichen Belegungen ihrer Variablen stets den gleichen Wert liefert, d.h. wenn das Urteil

$$\mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}$$

beweisbar ist.

Ein auf einem analytischen Gesetz beruhendes Urteil bezeichnen wir als ‚analytisches Urteil'. Es sei angemerkt, dass der Wert w irgendein Wert aus dem Wertebereich sein kann, also z.B. auch der Wert ‚falsch' oder ‚unbestimmt'. Beispiele für analytische Urteile sind $(\mathbf{p} \to \mathbf{p}) = \mathit{wahr}$ oder $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} = \mathit{falsch}$.

Definition: Positive und negative Tautologie[19]

Eine $k-$ stellige Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{W}_\mathrm{w} \cup \mathbb{W}_\mathrm{f}$ ist eine positive/negative Tautologie, wenn sie bei bekannter Bedeutung der Junktoren für alle möglichen Belegungen ihrer Variablen stets gleich einem ausgezeichneten/einem nicht ausgezeichneten Wert ist, d.h. wenn

$$\mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}_\mathrm{w} \text{ bzw. } \mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}_\mathrm{f}$$

gilt; dabei ist $\mathbb{W}_\mathrm{w}$ die nichtleere Menge der ausgezeichneten und $\mathbb{W}_\mathrm{f}$ die der nicht ausgezeichneten Werte.

In der Literatur werden aus historischen Gründen durchgängig analytische Gesetze mit positiven und Widersprüche mit negativen Tautologien identifiziert. Ein Ausdruck, der immer wahr ist (z.B. $\mathbf{p} \to \mathbf{p}$), gilt als logisches Gesetz; einem Ausdruck der immer falsch ist (z.B. $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}$), haftet ein Makel an und gilt als ein zu vermeidender Widerspruch. Dabei besteht zwischen beiden formal kein Unterschied. Wir werden daher den Begriff ‚Tautologie' soweit es möglich ist vermeiden und stattdessen von einem analytischen Gesetz sprechen.

Auch den Begriff ‚Widerspruch' verwenden wir nicht für einen Ausdruck, der immer falsch ist, vielmehr beziehen wir ihn (nach dem Vorbild eines widersprüchlichen Gleichungssystems) auf ein System von Urteilen; wir werden ihn an späterer Stelle einführen, denn er gehört nicht in den gegenwärtigen Zusammenhang.

Neben den analytischen Gesetzen gibt es noch Funktionen, die keine analytischen Gesetze darstellen; man bezeichnet sie als ‚Neutralität':[20]

---

[17] Analytisches Gesetz und Axiom werden in der Literatur oft miteinander vermengt; verwirrend ist außerdem der Begriff ‚Prinzip', von dem man nicht weiß, ob es sich um eine Setzung oder um einen beweisbaren Satz handeln soll.

[18] auch: aussagenlogische Identität oder aussagenlogisch allgemeingültig.

[19] griechisch aus to auto (dasselbe) legein (sagen).

[20] auch Kontingenz.

Definition: Neutralität

Eine k – stellige Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$ ist eine Neutralität, wenn sie bei bekannter Bedeutung der Junktoren für eine bestimmte Menge von Belegungen ihrer Variablen stets den gleichen Wert hat, d.h. wenn

$$\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathbb{B}^k \subset \mathbb{D}^k, \; \mathrm{w} \in \mathbb{W}$$

gilt; dabei ist $\mathbb{B}^k$ eine nichtleere Menge von Belegungen.

Zwischen positiver und negativer Tautologie und der Neutralität besteht folgende Beziehung: Gegeben sei eine k – stellige Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{W}_w \cup \mathbb{W}_f$; $\mathbb{W}_w$ sei die Menge der ausgezeichneten und $\mathbb{W}_f$ die der nicht ausgezeichneten Werte; die Bedeutung der Junktoren sei bekannt. Dann gilt:

f ist entweder eine positive Tautologie, d.h. $\mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}_w$,

oder f ist eine negative Tautologie, d.h. $\mathbf{f}(\mathbb{D}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}_f$,

oder f ist eine Neutralität, d.h. $\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathbb{B}^k \subset \mathbb{D}^k, \; \mathrm{w} \in \mathbb{W}$.

Man hätte auch sagen können: Unter den genannten Bedingungen ist eine Funktion entweder ein analytisches Gesetz oder sie ist kein analytisches Gesetz, sondern eine Neutralität. Man kann in einfacher Weise zeigen, dass es eine andere Möglichkeit nicht gibt. Außerdem ist von jeder Funktion f in endlich vielen Schritten entscheidbar, welcher der drei möglichen Fälle auf sie zutrifft. Letzteres werden wir später mit arithmetischen Mitteln beweisen.

Analytisches Gesetz, Tautologie und Neutralität beruhen auf der Voraussetzung, dass die Bedeutung der Junktoren bekannt ist. Entsprechend der oben angegebenen Unterscheidung zwischen Gesetz und Axiom entfällt bei einem Axiom diese Voraussetzung; es ist folgendermaßen definiert:

Definition: Axiom

Eine k – stellige Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$ ist ein Axiom, (1) wenn die Bedeutung der in f vorkommenden Junktoren *nicht* bekannt ist und (2) wenn festgelegt wird, dass sie für bestimmte Belegungen $\mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k$ ihrer Variablen stets den gleichen Wert liefert, d.h. wenn das Urteil

$$\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}$$

per Definition gilt.

Ein auf einem Axiom beruhendes Urteil bezeichnen wir als ‚axiomatisches Urteil'. Letzteres wird sich meist auf den gesamten Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ beziehen, es kann aber auch nur für einen Teilbereich $\mathbb{B}^k \subset \mathbb{D}^k$ gelten. Außerhalb diese Bereiches ist das Axiom nicht erklärt. Technisch kann man diese Einschränkung folgendermaßen realisieren: Man verkörpert das Axiom durch ein Bauteil, das stumm bleibt, d.h. keine Ausgangswerte liefert, wenn ein Eingangswert nicht in den Bereich $\mathbb{B}^k$ fällt; das Bauteil wirkt dann wie ein Filter.

4.5 Informationsgehalt von Urteilen

Ein analytisches Urteil wird gelegentlich als inhaltsleer bezeichnet. Doch diese Behauptung ist viel zu pauschal, um dem tatsächlichen Sachverhalt gerecht zu werden. Wir erläutern die Frage nach dem Informationsgehalt von Urteilen anhand von Funktionen über zweiwertige Definitions- und Wertebereiche; es sei also z.B.

$$\underbrace{\mathbb{D}^k = (wahr,\, falsch) \times \ldots \times (wahr,\, falsch)}_{k\ Produkte} \; (k \geq 1), \quad \mathbb{W} = \{wahr,\, falsch\}\,.$$

Die Funktionen seien vorgegeben, ebenso der ihnen zugewiesene Wert. Es besteht die Aufgabe, aus der Zuordnungsgleichung

$$\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = \mathrm{w}, \; \mathbb{B}^k \subset \mathbb{D}^k, \; \mathrm{w} \in \mathbb{W}$$

die zugehörige Belegung $\mathbb{B}^k$ zu bestimmen. Wir betrachten als Beispiel die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ und die beiden Urteile

$$\mathbf{f}(\mathbb{B}_{\mathrm{w}}{}^2) = wahr \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(\mathbb{B}_{\mathrm{f}}{}^2) = falsch\,;$$

die Konjunktion sei durch eine Wertetabelle (s. Tabelle 4) definiert. Aus dieser folgt

$$\mathbb{B}_{\mathrm{w}}{}^2 = \{(wahr, wahr)\}\,.$$

Es gibt also nur eine Belegung, für die **f** wahr ist; damit stehen auch die Werte für **p** und **q** fest: aus $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = wahr$ folgen die beiden Elementarlösungen **p** = wahr und **q** = wahr. Das ist der günstigste Fall, der auftreten kann. Das zweite Urteil ist für die drei Belegungen

$$\mathbb{B}_{\mathrm{f}}{}^2 = \{(wahr, falsch), (falsch, wahr), (falsch, falsch)\}\,.$$

erfüllt; aus $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = falsch$ kann man daher die Werte von **p** und **q** nicht bestimmen. Dennoch enthält auch dieses Urteil Information, denn es schränkt die vier möglichen Belegungen für $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$ auf drei Belegungen ein. Durch zusätzliche Angaben erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Werte für **p** und **q** bestimmen lassen. So folgt z.B. aus den beiden Urteilen $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = falsch$ und $\mathbf{p} = wahr$, dass $\mathbf{q} = falsch$ sein muss.

Nimmt man jedoch, um das Urteil $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = falsch$ zu ergänzen, etwa das tautologische Urteil $(\mathbf{p} \to \mathbf{p}) = wahr$ hinzu, so wird man feststellen, dass es keine weitere Einschränkung liefert. Das trifft nicht nur auf dieses Urteil, sondern ganz allgemein auf alle analytischen Urteile zu: Da sie immer für alle möglichen Belegungen gelten, sind sie für die Werte **p** und **q** maximal uninformativ. Urteile können demnach mehr oder weniger informativ sein. Wir präzisieren dieses Mehr oder Weniger durch ein Maße für den Informationsgehalt von Urteilen:

Definition:

Maß für den Informationsgehalt eines nicht axiomatischen Urteils

Gegeben sei ein nicht elementares nicht axiomatisches Urteil

$$\mathbf{f}(\mathbb{B}^k) = \mathrm{w}, \quad \mathbb{B}^k \neq \varnothing, \quad \mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k, \quad \mathrm{w} \in \mathbb{W}\,,$$

gebildet aus einer k–stelligen Funktion **f** mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ und dem Wertebereich $\mathbb{W}$; die Bedeutung der in **f** vorkommenden Junktoren sei bekannt. Der Definitionsbereich $\mathbb{D}^k$ bestehe aus N und die Belegungsmenge $\mathbb{B}^k$ aus n Belegungen.[21] Dann ist

$$m(N,n) = \frac{N-n}{N-1}, \quad N > 1 \tag{9}$$

ein Maß für den Informationsgehalt eines nicht axiomatischen Urteils.

Da nach Voraussetzung $\mathbb{B}^k \neq \varnothing$ und $\mathbb{B}^k \subseteq \mathbb{D}^k$, d.h. $1 \leq n \leq N$ ist, gilt somit $0 \leq m(N,n) \leq 1$.

Die obige Definition lässt sich leicht auf ein (widerspruchsfreies) System von nicht axiomatischen Urteilen verallgemeinern; hierzu muss man nur den Definitions- und Belegungsbereich entsprechend erweitern: Sei k_s die Anzahl der Variablen in einem System von nicht axiomatischen Urteilen, dann ist der Definitionsbereich dieses Systems das kartesische Produkt

$$\mathbb{D}^{k_s} = \underbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}}_{k_s - \text{faches kartesisches Produkt}}\;;$$

der Belegungsbereich $\mathbb{B}^{k_s}$ des Systems sei die Menge von k_s – Tupeln, für die alle Urteile des Systems zutreffen. Aus der Anzahl der Elemente dieser beiden Bereiche lässt

[21] Elementarurteile haben per Definition stets $n = 1$ Belegungen.

sich dann ebenfalls über die Gleichung (9) der Informationsgehalt des Systems bestimmen.

Bei den analytischen Urteilen ist wegen $\mathbb{B}^k = \mathbb{D}^k$ stets $n = N$ und folglich $m(N,N) = 0$. Nimmt man solche Urteile zu einem System von nicht axiomatischen Urteilen hinzu, bleibt dessen Belegungsbereich $\mathbb{B}^{k_s}$ unverändert; deswegen ist es berechtigt, sie bezüglich dieses Systems als inhaltsleer zu bezeichnen.

Bei Neutralitäten gilt dagegen wegen $\mathbb{B}^k \subset \mathbb{D}^k$ stets $1 \le n < N$. Folglich ist bei ihnen stets $m(N,n) > 0$, d.h. sie haben immer einen von Null verschiedenen Informationsgehalt. Das ist der Grund, warum analytische Gesetze – im Gegensatz zu Neutralitäten – für Anwendungen kaum eine Bedeutung haben. Den höchsten Informationsgehalt, nämlich $m = 1$, haben verständlicherweise die Elementarurteile, denn sie geben ja direkt den Wert einer Aussage an.

Das Maß m befolgt lediglich eine Ordnungsskala, d.h. wenn sich für Urteil 1 der Wert m_1 und für Urteil 2 der Wert m_2 ergibt und wenn $m_1 < m_2$ gilt, dann darf man sagen, dass auch der Informationsgehalt von Urteil 1 kleiner ist als der von Urteil 2. Aber aus den Größenunterschieden von m_1 und m_2 kann man keine sinnvollen Aussagen ableiten, insbesondere ist es z.B. bei $m_2 = 2*m_1$ nicht zulässig zu behaupten, der Informationsgehalt von Urteil 2 sei doppelt so hoch wie Urteil 1.

Falls sich für ein Urteil ein Wert $m > 0$ ergibt, dann kann es, zu anderen Urteilen hinzugefügt, zur Erhöhung des Informationsgehaltes beitragen; es kann aber auch gar nichts bewirken oder im ungünstigsten Fall einen Widerspruch erzeugen. Auf die Erhöhung des Informationsgehaltes gründen sich die in einem späteren Teil zu behandelnden Schlussfolgerungen.

Als Beispiel für eine Erhöhung des Informationsgehaltes betrachten wir wieder das Urteil $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \mathit{falsch}$ und dessen Belegungsmenge

$$\mathbb{B}_f^{\,2} = \{(\mathit{wahr}, \mathit{falsch}), (\mathit{falsch}, \mathit{wahr}), (\mathit{falsch}, \mathit{falsch})\}.$$

Bei zweiwertigen zweistelligen Urteilen ist $N = 4$; mit $n_f = 3$ folgt daraus $m_f = 0{,}25$. Nimmt man als weiteres Urteil noch das Elementarurteil $\mathbf{p} = \mathit{falsch}$ hinzu, ergibt sich die Belegungsmenge $\{(\mathit{falsch}, \mathit{wahr}), (\mathit{falsch}, \mathit{falsch})\}$, die beide Urteile erfüllt; für sie erhalten wir das Informationsmaß 0,5.

Die bisherigen Überlegungen zum Informationsgehalt von Urteilen hatten zur Voraussetzung, dass die Bedeutung der in den Urteilen vorkommenden Junktoren bekannt ist. Eine ganz andere Situation liegt bei den axiomatischen Urteilen vor, bei denen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Doch auch für sie lässt sich ein Maß für den Informationsgehalt einführen, nur bezieht es sich nicht mehr auf die Anzahl der Elemente von Definitionsbereich und Belegungsmenge, sondern darauf, wie viele zweistelligen Junktoren es ausschließt im Verhältnis zur Anzahl aller möglichen zweistelligen Junktoren.

Angenommen, es soll die zweistellige Implikation eingeführt werden. Hierfür bietet sich natürlich das Axiom $\mathbf{p} \circledast \mathbf{p} = \mathit{wahr}$, das jetzt nicht mehr beweisbar ist, sondern per Definition gelten soll. Der Tabelle 4 ist zu entnehmen, dass es im zweiwertigen Fall insgesamt $N_{J_2} = 10$ (nichttriviale) zweistellige Junktoren gibt. Von diesen gibt es $n_{J_2} = 5$ Junktoren, für die $\mathbf{p} \circledast \mathbf{p} = \mathit{wahr}$ gilt; es sind dies die Junktoren mit der Nummer 7, 9, 14 und 15. Axiom $\mathbf{p} \circledast \mathbf{p} = \mathit{wahr}$ schließt also nur fünf von 10 Fällen aus; $N_{J_2} = 10$ und $n_{J_2} = 5$ in Gleichung (9) eingesetzt, ergibt für dieses Axiom ein Informationsgehalt von 5/9. Weitere Einschränkungen, d.h. weitere Axiome sind erforderlich, um einen dieser noch verbleibenden fünf Junktoren auszuzeichnen. Das Axiom

$$\{\mathbf{p} \circledast [(\mathbf{q} \circledast \mathbf{p}) \circledast \mathbf{p}]\} \circledast [\mathbf{q} \circledast (\mathbf{r} \circledast \mathbf{p})] = \mathbf{q}$$ [22]

hingegen gilt nur für den SHEFFER Strich und schließt somit bereits 9 von 10 Fällen aus; es besitzt daher den Informationsgehalt 1. Die Bedeutung der Junktoren lässt sich also nicht nur über Wertetabellen, sondern auch über ein Axiomensystem eindeutig festlegen, das im günstigsten Fall nur aus einem einzigen Axiom zu bestehen braucht; auch darauf werden wir später noch zurückkommen.

[22] MC Cune et al. (2002): *Short Single Axioms for Boolean Algebra*, p. 3.

5 Darstellungsproblem

Zeichensprachliche Darstellungen von realen Systemen bieten einen großer Vorteil: Man braucht nicht mehr mit den Systemen selbst zu hantieren, sondern kann sich, stellvertretend für sie, auf Zeichenmanipulationen beschränken. Dabei wird von allem Inhalt abgesehen, denn die Umformungsregeln beziehen sich nur auf die Form. Sollen solche Operationen der Lösung einer bestimmten angewandten Aufgabe dienen, so muss zwischen der Zeichenwelt und dem zur Aufgabe gehörenden System eine Verbindung bestehen. Daraus ergibt sich ein Darstellungsproblem, welches darin besteht, zu einem vorgegebenen Aufgabenstellung die passende formale Darstellung zu ermitteln, ein Vorgang, der aus mehreren unterschiedlichen Teilschritten besteht. Sie werden im folgenden erläutert.

a. Primsysteme (Eingangskanäle/Primaussagen) $\mathbb{P}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$

generieren Werte $\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2,\mathrm{w}_3,\ldots\in \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{P}}$

Wertebereich $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{P}}$

b1. einstellige Basissysteme (Gatter/Basisaussagen) $\mathbb{G}_1=\{f_1,\ f_2,\ \ldots f_{n_1}\}$

realisieren Abbildungen $f_n:\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1}\Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1}\quad n=1,2,\ldots,n_1$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1}$

b2. zweistellige Basissysteme (Gatter/Basisaussagen) $\mathbb{G}_2=\{g_1,g_2,\ldots g_{n_1}\}$

realisieren Abbildungen $g_n:\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2}\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2}\Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2}\quad n=1,2,\ldots n_2$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2}$

c. *kl* – Systeme (Verschaltung von Gattern/Verknüpfung von Basisaussagen) $\mathbb{S}=\{s_1,s_2,\ldots,n_{kl}\}$

realisieren Abbildungen $s_n:\ \underbrace{\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\ldots\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{k_n\ Faktoren}\Rightarrow\underbrace{\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\ldots\times\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{l_n\ Faktoren}$

$n=1,2,\ldots,n_{kl}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}$

Tabelle 7: Bestandteile der materiellen und ideellen Systemwelt; sie werden als gegeben betrachtet.

Ausgangspunkt ist die als bekannt angenommene Systemwelt. Sie bestehe aus der Menge von Eingangskanälen $\mathbb{P}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$, die hier die Stelle der Primsysteme vertreten und nach Voraussetzung nur einen Wertebereich $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{P}}$, aber keine Eingangswerte und demnach auch keinen Definitionsbereich besitzen (Tabelle 7, Teil a). Sie bestehe ferner aus einer Menge von ein- und zweistelligen Gattern, welche die Basissysteme verkörpern und entweder einen oder zwei Eingangswerte in jeweils einen Ausgangswert umwandeln (Tabelle 7, Teil b). Außerdem gebe es eine aus Gattern aufgebaute Menge von komplexen Systemen, die eine beliebige Menge von Eingangswerten in eine beliebige Menge von Ausgangswerten umwandeln (Tabelle 7, Teil b).

Im Gegensatz zur Systemwelt ist die logische Welt eine reine Zeichensache. Hier wird mit Variablen operiert, die nicht für Systeme, sondern für definierte Werte stehen. Woher diese Werte stammen, dafür interessiert man sich in der Logik nicht; damit entfällt dort die Ebene a aus Tabelle 7. Die beiden anderen Ebenen der Systemwelt haben dagegen in der logischen Welt eine direkte Entsprechung (Tabelle 8).

b1. einstellige Junktoren $\mathbb{J}_1=\{\approx_1,\approx_2,\ldots,\approx_{n_{\mathbb{J}_1}}\}$

realisieren Abbildungen $\approx_n:\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_1}\Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_1}\quad n=1,2,\ldots,n_{\mathbb{J}_1}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_1}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_1}$

b2. zweistellige Junktoren $\mathbb{J}_2=\{\circledast_1,\circledast_2,\ \ldots,\ \circledast_{n_{\mathbb{J}_2}}\}$

realisieren Abbildungen $\circledast_n:\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_2}\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_2}\Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_2}\quad n=1,2,\ldots n_{\mathbb{J}_2}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_2}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{J}_2}$

c. Logische Ausdrücke $\mathbb{A}=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n_{kl}}\}$

realisieren Abbildungen $a_n:\ \underbrace{\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\ldots\times\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{k_n\ Faktoren}\Rightarrow\underbrace{\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}\times\ldots\times\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{l_n\ Faktoren}$

$n=1,2,\ldots n_{kl}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}$ und $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}$

Tabelle 8: Darstellungsmittel in der logischen Welt.

Das Darstellungsproblem lösen heißt, für eine konkrete Anwendung einen geeigneten logische Formalismus finden. Ein Formalismus ist geeignet, wenn die Beziehungen zwischen den Systemen den Beziehungen zwischen den Zeichen entsprechen.[23] Dies geschieht in mehreren Schritten, die im folgenden beschrieben und, parallel dazu, zunächst am Beispiel von elektrischen Gattern erläutert werden (Tabelle 9).

a. Primsysteme (Eingangskanäle) $\mathbb{P} = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...\}$

Wertebereich $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{P}} = \{an,\ aus\}$

b1. einstelliges Basissystem (Gatter) $\mathbb{G}_1 = \{\ f_1\}$

realisieren Abbildungen $f_1 : \mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_1} \Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_1}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_1} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_1} = \{an,\ aus\}$

b2. zweistellige Basissysteme (Gatter) $\mathbb{G}_2 = \{g_1, g_2\}$

realisieren Abbildungen $g_n : \mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_2} \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_2} \Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_2} \quad n = 1, 2$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}_2} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{G}2} = \{an,\ aus\}$

c. *kl*– Systeme (Verschaltung von Gattern) $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, ..., n_{kl}\}\ ,\ \ n = 1, 2, ..., n_{kl}$

realisieren Abbildungen $s_n :\ \underbrace{\mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} \times ... \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}}}_{k_n\ Faktoren} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} \times \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} \times ... \times \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}}}_{l_n\ Faktoren}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}^{\ \mathbb{S}} = \{an,\ aus\}$

Tabelle 9: Bestandteile des Anwendungsbeispiels ‚elektronische Gatter'.

[23] LEIBNIZ A VI.4A, p. 916: „Lex expressionum haec est: ut ex quarum rerum ideis componitur rei exprimendae idea, ex illarum rerum characteribus componatur rei expressio." Ähnlich im *Dialog* A VI.4A, 24, 25.

1. Schritt. Darstellung des Anwendungsfalls mit den Sprachmitteln der Systemwelt

Gegeben seien als Basissysteme das einstellige Gatter f_1 sowie die beiden zweistelligen Gatter g_1 und g_2 in ausreichend großer Stückzahl. Außerdem gebe es noch hinreichend viele Eingangskanäle, welche die Gatter mit Werte versorgen. Definitions- und Wertebereich seien für alle Systeme gleich; sie sollen die beiden Werte ‚an' und ‚aus' umfassen. Das einstellige Gatter könnte physikalisch durch einen Schalter realisiert werden, für die beiden zweistelligen Gatter kämen eine Reihen- bzw. Parallelschaltung von zwei Schaltern infrage. Diese Gatter sollen in beliebiger Weise miteinander verschaltet werden können; jede Verschaltung liefert ein *kl*- System mit einer bestimmten Anzahl von Ein- und Ausgänge (s. Tabelle 9).

Im letzten Erfassungsschritt gilt es, Wertetabellen für die Abbildungen f_1, g_1 und g_2 aufzustellen; das erfolgt experimentell, indem ermittelt wird, bei welchen Eingangswerten sich welcher Ausgangswert ergibt. Für die ein- bzw. zweistelligen Abbildungen gibt es nur die in der Tabelle 10 angeführte Anzahl von Möglichkeiten.

Wertetabellen des einstelligen Gatters f_1:

Eingangswert	Ausgangswert
an	aus
aus	an

Wertetabellen der zweistelligen Gatter g_1 und g_2:

Eingangswerte		Ausgangswert g_1	Ausgangswert g_2
an	an	an	an
an	aus	aus	an
aus	an	aus	an
aus	aus	aus	aus

Tabelle 10: Sprachliche Erfassung der Fakten aus der Gatterwelt. Charakterisierung der Gatter durch Wertetabellen. Da sie festliegen, muss der Formalismus so gewählt werden, dass er diese empirische Fakten wiedergibt.

2. Schritt. Wahl des logischen Formalismus

Die Wahl des logischen Formalismus orientiert sich daran, welche Wertigkeit die Ein- und Ausgangskanäle der Systeme haben. Die Gatter wurden als zweiwertig eingeführt, folglich muss der Formalismus ebenfalls zweiwertig sein; wir wählen daher als Darstellungsmittel die zweiwertige Junktorenlogik.

3. Schritt. Umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Werten aus dem empirischen und dem logischen Wertebereich

Für das Schalterbeispiel gibt es zwei gleichwertige Zuordnungsmöglichkeiten:

(a) $an \rightleftharpoons w_1 \quad aus \rightleftharpoons w_2$,

(b) $an \rightleftharpoons w_2 \quad aus \rightleftharpoons w_1$.

4. Schritt. Umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den empirischen Prozessen und den logischen Operationen.

Bei Zweiwertigkeit gibt es genau vier einstellige und 16 zweistellige Junktoren, d.h. für die in Tabelle 10 angegebenen Wertetabellen muss es Junktoren geben; es kommt also jetzt nur noch darauf an, die richtigen unter den vier bzw. 16 möglichen auszuwählen. Aus dem Vergleich der Wertetabellen in Tabelle 10 und denen der Junktorenlogik ergibt sich dann:

$$f_1 \rightleftharpoons \neg$$

$$g_1 \rightleftharpoons \wedge, \quad g_2 \rightleftharpoons \vee \quad \text{für Wahl (a)}$$

$$g_2 \rightleftharpoons \vee, \quad g_1 \rightleftharpoons \wedge \quad \text{für Wahl (b).}$$

5. Schritt. Nachweis der Strukturäquivalenz

Die Junktoren wurden gerade so gewählt, dass sie sich als strukturäquivalent zu den Gattern erweisen; hier wurde also die Strukturäquivalenz durch eine geeignete Wahl der Darstellungsmittel gesichert. Daraus folgt allerdings noch nicht die Strukturäquivalenz für beliebige Gatterverschaltung. Erst wenn auch hierfür der Nachweis vorliegt, ist der Darstellungsvorgang für das Anwendungsbeispiel abgeschlossen, und wir dürfen annehmen, dass sich mit dem in Tabelle 11 charakterisierten Formalismus die Gatterwelt eindeutig beschreiben lässt, d.h. insbesondere: Alle aus dem Formalismus ableitbaren Gesetze sind zugleich auch empirische Gesetze über die Gatter.

Variablenmenge: $\mathbb{P} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \ldots\}$

Wertebereich: $\mathbb{D}^{\mathbb{P}} = \mathbb{W}^{\mathbb{P}} = \{w_1, w_2\}$

Menge der Junktoren: $\mathbb{J}^{\mathbb{P}} = \{\neg, \wedge, \vee\}$

Wertetabelle der logischen Operationen:

p	¬p	p	q	p ∧ q	p ∨ q
w_1	w_2	w_1	w_1	w_1	w_1
w_2	w_1	w_1	w_2	w_2	w_1
		w_2	w_1	w_2	w_1
		w_2	w_2	w_2	w_2

Tabelle 11: Junktorenlogischer Formalismus für elektrische Gatter.

a. Primsysteme (Primaussagen) $\mathbb{P} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

Wertebereich $\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{P}} = \{wahr, \ falsch\}$

b1. einstelliges Basissystem (Junktor) $\mathbb{G}_1 = \{f_1\}$

realisieren Abbildungen $f_1 : \mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1} \Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_1} = \{wahr, \ falsch\}$

b2. zweistellige Basissysteme (Junktoren) $\mathbb{G}_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$

realisieren Abbildungen $g_n : \mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2} \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2} \Rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2} \quad n = 1, 2, 3$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{G}_2} = \{wahr, falsch\}$

c. *kl*– Systeme (Verschaltung von Junktoren) $\mathbb{S} = \{s_1, s_2, \ldots, n_{kl}\}, \ n = 1, 2, \ldots, n_{kl}$

realisieren Abbildungen $s_n : \underbrace{\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} \times \ldots \times \mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{k_n \ Faktoren} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} \times \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} \times \ldots \times \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}}}_{l_n \ Faktoren}$

Definitions- und Wertebereich $\mathbb{D}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} = \mathbb{W}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{S}} = \{wahr, \ falsch\}$

Tabelle 12: Bestandteile eines Anwendungsbeispiels aus dem Bereich der ideellen Systeme.

Die gleichen Darstellungsschritte sind auch für die ideellen Systeme erforderlich. So könnte sich für solch ein System in Schritt 1 die in Tabelle 12 gezeigte sprachliche Darstellung ergeben haben. Statt Eingangskanäle haben wir jetzt Primaussagen, statt Gatter Junktoren und die Werte heißen nicht mehr ‚an' und ‚aus', sondern ‚wahr' und ‚falsch'; außerdem können andere ebenfalls durch Wertetabellen repräsentierte Funktionen auftreten (Tabelle 13).

Wertetabellen des einstelligen Gatters f_1:

Eingangswert	Ausgangswert
wahr	falsch
falsch	wahr

Wertetabellen der zweistelligen Gatter g_1 und g_2:

Eingangswerte		Ausgangswert		
		g_1	g_2	g_3
wahr	wahr	falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch	wahr	wahr

Tabelle 13: Wertetabellen für ein Anwendungsbeispiel aus der Aussagenwelt.

Da es sich um ein zweiwertiges Problem handelt, wird man in Schritt 2 wiederum als Basis die zweiwertige Aussagenlogik wählen und in Schritt 3 etwa die Zuordnung

$$wahr \rightleftharpoons \mathrm{w}_1 \quad falsch \rightleftharpoons \mathrm{w}_2\,,$$

treffen. In Schritt 4 gilt es diejenigen Junktoren zu identifizieren, welche die Wertetabellen der Funktionen erfüllen. Es zeigt sich, dass sich die in Tabelle 13 charakterisierten Funktionen durch

$$f_1 \rightleftharpoons \neg$$

$$g_1 \rightleftharpoons \mathrm{Y}, \;\; g_2 \rightleftharpoons \rightarrow, \;\; g_3 \rightleftharpoons \uparrow,$$

also durch Negation, exklusives Oder, Implikation und SHEFFER Strich beschrieben werden können. Im Schritt 5 ist dann noch die Strukturäquivalenz nachzuweisen.

In der Logikliteratur wird der Interpretationsbegriff sehr uneinheitlich gebraucht, wobei oft schon eine Belegung der Variablen als Interpretation gilt. Besonders missverständlich ist die weitverbreitete Ansicht, dass bei einer Anwendung den formalsprachlichen Elementen der Logik eine Bedeutung zugewiesen werde müsse. Die beiden Beispiele zeigen, dass es hierbei nicht bloß um eine Zuweisung handelt, denn diese sichert nicht automatisch die erforderlichen Strukturäquivalenzen (Abbildung 22). Es ist daher nicht gleichgültig, wie man die logischen Elemente „interpretiert", denn die Eigenschaften der Systeme *bestimmen* den Formalismus. Zwar dürfen die Werte *beliebig gewählt werden,* aber dann *ergeben* sich die Junktoren unter anderem aus dieser Wahl. Eine sogenannte Interpretation besteht somit aus ganz unterschiedlichen Zuordnungsvorgängen.

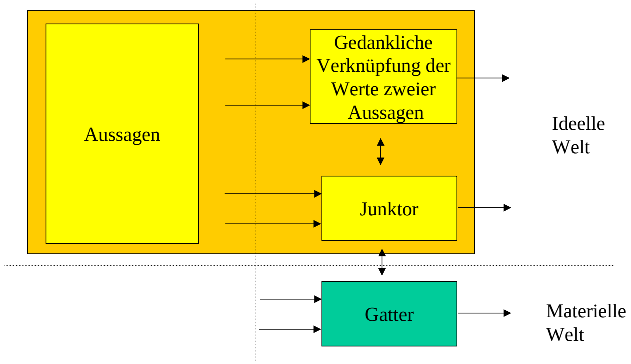

Abbildung 22: Abstraktions- und Darstellungsebenen bei der materiellen Verwirklichung der gedanklicher Verknüpfung der Werte zweier Aussagen. In der Logik (gekennzeichnet durch Junktoren) und in der Technik (gekennzeichnet durch Gatter) wird von den Aussagen abstrahiert; betrachtet werden nur die zu den Aussagen gehörenden Werte. Außerdem gilt es zwei Darstellungsprobleme zu lösen: Besteht über die gedankliche Verknüpfung zweier Werte eine klare Vorstellung, d.h. ist für jedes Paar von Eingangswerten der Ausgangswert bekannt, dann müssen die Junktoren so gewählt werden, dass sie ebenfalls für die Eingangswerte den zugehörigen Ausgangswert liefern. Das zweite Darstellungsproblem betrifft die technische Realisierung der als bekannt vorausgesetzten Junktoren. Beide Probleme sind gelöst, wenn sowohl zwischen den gedanklichen Verknüpfungen und den Junktoren als auch zwischen den letzteren und den Gatter Strukturäquivalenz herrscht.

6 Literatur

ASSER, GÜNTER. (1972a): *Einführung in die mathematische Logik. Teil 1 Aussagenkalkül.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig [4]1972.

ASSER, GÜNTER. (1972b): *Einführung in die mathematische Logik. Teil 2 Prädikatenkalkül der ersten Stufe.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972.

ASSER, GÜNTER. (1981): *Einführung in die mathematische Logik. Teil 3 Prädikatenlogik höherer Stufe.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1981.

BERNSTEIN, B. A. (1936): Postulates for Boolean algebra involving the operation of complete disjunction. *Annals of Mathematics*, **37**, No. 2, 1936, p. 317 – 325.

BOCHENSKI, INNOCENT M. (): *Formale Logik.* Alber Verlag, Freiburg.

BÖHME, GERT (1981): *Einstieg in die mathematische Logik.* Carl Hanser Verlag München/Wien 1981.

BORKOWSKI, LUDWIK (): Formale Logik. *Logische Systeme. Einführung in die Metalogik.* Akademie - Verlag Berlin.

ESSLER, WILHELM K. (1966): *Einführung in die Logik.* Alfred Kröner Verlag Stuttgart 1966.

FRINK, ORRIN (1928): On the existence of linear algebras in Boolean algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **34**, 1928, p. 329-333.

HARBECK, GERD (1972): Einführung in die formale Logik. August Bagel, Düsseldorf; Ferdinand Hirt, Kiel; Friedrich Vieweg + Sohn, Braunschweig, [4]1972.

HILBERT, DAVID & ACKERMANN, WILHELM (1972): *Grundzüge der theoretischen Logik.* Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York [6]1972.

HOYNINGEN-HUENE, PAUL (1988): *Formale Logik. Eine philosophische Einführung.* Verlag Philipp Reclam jun., Stuttgart 1998.

JUHOS, BÉLA (1954): *Elemente der neuen Logik.* Humboldt-Verlag Frankfurt/M. – Wien 1954.

KLAUS, GEORG (1972): *Moderne Logik. Abriß der formalen Logik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin [6]1972.

LORENZEN, PAUL (1970): *Formale Logik.* Sammlung Göschen Band 1176/1176a, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1970.

McCUNE, WILLIAM; VEROFF, ROBERT; FITELSON, BRANDEN; HARRIS, KENNETH; FEIST, ANDREW & WOS, LARRY (2002): Short Single Axioms for Boolean Algebra. *Journal of Automated Reasoning*, 29, no. 1, 2002, p. 1-16.

MULLER, D. E. (1954): Application of Boolean Algebra to switching circuits design and to error detection. *IRE Trans. Electron. Comp.*, Vol **EC-3**, 1954, p. 6 – 12.

REED, S. M. (1954): A class of multiple-error correcting codes and their decoding scheme. *IRE Trans. Inf. Th.*, Vol **PGIT-4**, 1954, p. 38 – 49.

ROSENKRANZ, SVEN (2006): *Einführung in die Logik.* Verlag J. B. Metzler, Stuttgart / Weimar, 2006.

PEANO, G. (1895): *Formulaire de Mathématiques*, 1895, Teil I, p. 5.

POSTHOFF, CHRISTIAN & STEINBACH, BERND (2004): *Logical Functions and Equations. Binary Models for Computer Science.* Springer Netherlands Dordrecht, 2004.

SASAO, T. (1993): *Logic Synthesis and Optimization.* Kluwer Academic Publishers. Boston/ London/ Dordrecht, 1993.

SAUL, J.M. (1992): Logic Synthesis for Arithmetic Circuits Using Reed-Muller Representation. *Proc. EDAC*, Brussels, 1992, p. 109 – 113.

STEINBACH, BERND & KEMPE, G. (1993): Minimization of AND-EXOR Expressions. *Proceedings of IFIP WG 10.5 - Workshop on Applications of the Reed - Muller Expansion in Circuit Design*, Hamburg, 1993, pp. 20 – 26.

STONE, M. H. (1936): The theory of representations for Boolean Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **40**, 1936, p. 37-111.

STROBACH, NIKO (2005): *Einführung in die Logik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 2005.

ŽEGALKIN, I. I. (1927): Über die Technik der Berechnung von Sätzen in der symbolischen Logik (russ.), *Matematiceskij Sbornik* (*Mathematische Sammlung*) **34**, 1927, p. 9-28 (Moskva).

ŽEGALKIN, I. I. (1928): Arithmetisierung der symbolischen Logik. Die Theorie der Aussagen und Funktionen mit einem Argument (russ.), *Matematiceskij Sbornik* (*Mathematische Sammlung*) **35**, 1928, p. 311-377 (Moskva).

ŽEGALKIN, I. I. (1929): Arithmetisierung der symbolischen Logik. Fortsetzung (russ.), *Matematiceskij Sbornik* (*Mathematische Sammlung*) **36**, 1929, p. 205-338 (Moskva).