

# Über die Darstellung einer deduktiven Wissenschaft als Deduktgeflecht<sup>1</sup>

Peter Jaenecke  
Straubenhardt

## **Zusammenfassung**

Unter Vernachlässigung von Einzelheiten werden Dedukt und Deduktgeflecht beschrieben und einige Konsequenzen betrachtet, die sich aus diesen Strukturen ergeben. Anschließend wird anhand der Abhängigkeit von Aussage und Begriff gezeigt, dass man mit einer begriffsorientierten Ontologie keine deduktive Wissenschaft darstellen kann.

## **Suchbegriffe**

Abhängigkeit von Aussage und Begriff, Aussagen- und begriffsbasierte Methode, explizite und implizite Definition, Dedukt, Deduktive Wissenschaft, Deduktgeflecht, Deduktionsprinzip, Ontologie, Wissensdarstellung.

## **1 Einleitung**

Literaturrecherchesysteme verwenden zur Erfassung von Dokumenten ein rechnerverwertbares *Werkzeugwissen*, z.B. irgendein Klassifikationssystem; es wird z.B. dazu benutzt, das in den Dokumenten enthaltene *Originalwissen* zu indexieren. Werkzeugwissen ist gegenüber dem Originalwissen zwar ein Hilfswissen, aber für bestimmte Aufgaben wie die Literaturrecherche erfüllt es seinen Zweck, für andere Aufgaben, bei denen es etwa um die Lösung bestimmter Probleme geht, ist es dagegen ungeeignet. Hier bietet es sich an, auf das Originalwissen selbst, also das was *in* den Lehrbüchern steht, zurückzugreifen, so dass Werkzeugwissen irgendwelcher Art nicht mehr benötigt wird. Allerdings liegt das Originalwissen im Allgemeinen nicht in rechnerverwertbarer Form vor; es muss daher ohne Inhaltsverlust erst in solch eine Form gebracht werden. Wie dies bei deduktivem Wissen geschehen kann, damit beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

Lehrbuchautoren folgen einem genetischen Aufbau: Ausgehend von einfachen, allgemeinverständlichen Grundlagen entwickeln sie einzelne Gedankengänge durch eine folgerichtige schrittweise Entfaltung ihres Stoffes. Folgerichtig heißt, das eine baut auf dem anderen auf. Doch trotz dieser Ordnung eignet sich wissenschaftliches Wissen, so wie es sich in Lehrbüchern findet, aufgrund der zu geringen Gliederung kaum zur Wissensdarstellung auf einem Rechner. Deswegen wurden in einer früheren Arbeit<sup>2</sup> feststrukturierte Wissensbausteine vorgestellt, aufgefasst als sprachliche Form für abgeschlossene gedankliche Einheiten. Genetisch strukturierte Lehrbuchinhalte lassen sich dann durch eine Folge von solchen Wissensbausteinen darstellen, und da letztere eine wohldefinierte Struktur besitzen, sind sie einer rechnerverwertbaren Wissensdarstellung zugänglich. Durch Mehrfachnutzung der Wissensbausteine lässt sich sogar ein gebietsübergreifender Wissensraum aufbauen.

---

<sup>1</sup> In: OHLY, H. PETER & WEBER, KARSTEN [Hrsg.]: *Theorie, Information und Organisation von Wissen*. Ergon Verlag Würzburg (im Erscheinen): <http://www.peterjaenecke.de/wissenschaftstheorie.html> 05. 04. 13.

<sup>2</sup> JAENECKE 2013: *Wissensbausteine*.

Bei dieser Darstellung bleibt jedoch die deduktive Methode auf der Strecke, die seit den *Analytica posteriora* von ARISTOTELES als Kennzeichen von Wissenschaftlichkeit gilt. Diese Methode, auch als axiomatische, axiomatisch-deduktive oder, im Hinblick auf EUKLID<sup>5</sup> Geometrie, als geometrische Methode bezeichnet, hat eine wechselvolle Geschichte, in deren Verlauf das Verständnis von einer deduktiven Wissenschaft mehrfach wechselt. Zur Klarstellung legen wir daher fest: Eine deduktive Wissenschaft ist dadurch gekennzeichnet, dass sie nur zwei nicht leere Mengen von wahren Aussagen kennt:

- Die Aussagen der einen Menge sind wahr, weil es so festgesetzt wurde;
- die Aussagen der anderen Menge sind wahr, weil für sie eine Herleitung vorliegt.

Dabei ist es gleichgültig, wie die Aussagen gefunden wurden. Aus dieser Kennzeichnung lässt sich zwangslos die als *Deduktgeflecht* bezeichnete aussagenbasierte Struktur einer deduktiven Wissenschaft entwickeln; sie ist der äußere Rahmen für die rechnergerechte Darstellung von Originalwissen.

## 2 Dedukt

Eine Herleitung ausführen bedeutet, Ausdrücke nach bestimmten Regeln umformen. Damit überhaupt Regeln aufgestellt und befolgt werden können, müssen die Ausdrücke wohlformuliert sein. Die Menge aller wohlformulierten Ausdrücke bilden bekanntlich eine formale Sprache.<sup>3</sup> In der Literatur wird sie meist nicht erwähnt; man geht davon aus, dass der Leser die Sprache beherrscht. Für die Praxis ist diese Vorgehensweise sinnvoll, denn ebenso wenig wie man beim Schreiben oder Lesen eines umgangssprachlichen Satzes über die Grammatik nachdenkt, ebenso wenig denkt man beim Schreiben oder Lesen etwa von mathematischen Ausdrücken über deren „Orthographie“ nach. Wir nehmen daher an, dass man mit der Wohlformuliertheit vertraut ist. Was für die wohlformulierten Ausdrücke gilt, gilt sinngemäß auch für die Herleitungsregeln: Ihre Beherrschung gehört zum Handwerkszeug eines jeden theoretisch arbeitenden Wissenschaftlers. Wir setzen sie daher, der Praxis folgend, ebenfalls stets als bekannt voraus. Sprachvereinbarungen und Herleitungsregeln gehen somit nicht direkt in den Aufbau einer deduktiven Wissenschaft ein; sie gehören zu ihren Voraussetzungen.

Wir beschreiben zunächst die Deduktstruktur, fügen zwei Beispiele an und führen danach Qualitätsanforderungen für die Aussagen eines Deduktkopfes ein; es ist dies die Forderung nach Wahrheit, Konsistenz, Kompaktheit und Homogenität.

### 2.1 Deduktstruktur

Ein Dedukt ist ein aus den drei Komponenten *Deduktkopf*, *Herleitung* und *Ergebnis* bestehendes Schema, das einer logischen Schlussfolgerung nachgebildet wurde (Abbildung 1a). Dieses dreiteilige Schema ist der Grundbaustein einer deduktiven Wissenschaft, und es ist, wie sich herausstellt, ihr einziger Grundbaustein. Als Schema ist es eine nicht wahrheitswertdefinite Entität. Alle drei Komponenten enthalten ausschließlich wohlformulierte Aussagen, und zwar

- besteht ein Deduktkopf aus einer *Menge* von Aussagen  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ;
- eine Herleitung aus einer *Folge* von Aussagen  $H_1, H_2, \dots, H_m$ ;
- ein Ergebnis aus einer *Menge* von Aussagen  $E_1, E_2, \dots, E_n$ ;

<sup>3</sup> Formale Sprache im Sinne der theoretischen Informatik; s. SALOMAA 1978: *Formale Sprachen*.

dabei ist eine Aussage eine wahrheitswertdefinite Behauptung. Bezüglich der Aussagenart gibt es keine Einschränkungen; zulässig sind z.B. logische oder mengentheoretische Ausdrücke oder mathematische Gleichungen.

Deduktkopf	$\frac{A_1, A_2, \dots A_k}{\phantom{H_1, H_2, \dots H_m}}$	$A_1, A_2, \dots A_k$
Herleitung	$\frac{H_1, H_2, \dots H_m}{\phantom{E_1, E_2, \dots E_n}}$	$\frac{\phantom{A_1, A_2, \dots A_k}}{\phantom{E_1, E_2, \dots E_n}}$
Ergebnis	$E_1, E_2, \dots E_n$	$E_1, E_2, \dots E_n$
	(a)	(b)

Abbildung 1: Deduktstruktur: (a) vollständige, (b) vereinfachte Form mit unterdrückter Herleitung.

In der Mathematik steht die Herleitung im Vordergrund des Interesses. Für die Erfahrungswissenschaften gilt eher das Umgekehrte: Die Herleitungen, die sich über mehrere Lehrbuchseiten hinziehen können, sind nur Mittel zum Zweck und unterbrechen den eigentlichen Gedankengang; was hier zählt, ist das Ergebnis. Man ist daher viel eher als in der Mathematik geneigt, die Herleitung zu überspringen; von dieser Möglichkeit werden wir Gebrauch machen. Das Übergehen im Dedukt-schema drücken wir durch ein Leerfeld zwischen den Trennstrichen aus (Abbildung 1b); man kann sich die Doppelstriche bildlich als einen geschlossenen Rollschrank vorstellen, der sich jederzeit öffnen lässt, um die Herleitung zum Vorschein zu bringen.

Für die Aussagen im Deduktkopf sind je nach betrachtetem Kontext ganz unterschiedliche Benennungen im Umlauf. Aus Sicht der Wissensdarstellung bilden sie die Wissensbasis, bei einer Schlussfolgerung bezeichnet man seine Aussagen als Prämissen oder Vordersätze, in der mathematischen Grundlagenforschung entspricht der Deduktkopf einem Axiomensystem. Im erfahrungswissenschaftlichen Zusammenhang spricht man unspezifisch von Axiomen, Grundgesetzen, Postulaten, Theoremen, Hypothesen, Annahmen, Zuweisungen sowie von Voraussetzungen und Fakten, sofern letztere als Aussagen formuliert wurden.

*Diese Benennungen sind rein klassifikatorischer Natur und haben im Dedukt keinerlei Bedeutung. Insbesondere gibt es zwischen den Aussagen im Deduktkopf keine Rangreihenfolge; sie sind alle gleichwertig, und sie werden stets in der Reihenfolge angewendet, wie es die Lösung der Herleitungsaufgabe gerade erfordert.*

Herleitungen bestehen aus inhaltsneutralen, wahrheitswerterhaltenden formalen Umformungen der Aussagen aus dem Deduktkopf. ‚Herleiten‘ ist als Oberbegriff für alle Herleitungsformen zu verstehen; zu ihnen zählen z.B. Schlussfolgern, Berechnen, Beweisen, Lösen (etwa eines Gleichungssystems oder einer Differentialgleichung), aber auch das Simulieren eines Vorgangs auf einem Rechner. Bei der Kennzeichnung eines Dedukt-es bleibt die Art der Herleitung unberücksichtigt. Entsprechendes gilt für die verschiedenen Ergebnisarten.

*Die Herleitungen bestehen aus reinen Zeichenmanipulationen; sie erfolgen ausschließlich mit den Methoden, die der formale Apparat inform von Herleitungsregeln zur Verfügung stellt: Man kann sie ausführen, ohne eine Kenntnis darüber zu haben, worüber die Aussagen etwas aussagen und welche Bedeutung ihre Zeichen besitzen.*

**2.2 C<sup>14</sup>-Altersbestimmung und Herleitung des Zerfallsgesetzes**

In Abbildung 2 sind zwei Dedukte aus der Physik angegeben. Abbildung 2 (a) zeigt ein Dedukt zur Altersbestimmung einer Probe nach der C<sup>14</sup>-Methode; in Abbildung 2 (b) wird das Zerfallsgesetz nach SCHWEIDLER hergeleitet. In den Deduktköpfen erscheinen nur physikalische Aussagen – hier in der Form von Gleichungen bzw. Ungleichungen – deren Wahrheitswert festgesetzt wurde. Die mathematische Basis wurde durch die Erwähnung von Theoremen angedeutet.

<p>Theoreme der Analysis</p> $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ $N_0^{\text{Probe}} = N_0^{\text{Vergleichsobjekt}}$ $N^{\text{Probe}}(t) = \frac{6}{\text{min} \cdot \text{s}}$ $N_0^{\text{Vergleichsobjekt}} = \frac{16}{\text{min} \cdot \text{s}}$ $\lambda = 1,2055 \cdot 10^{-4} / \text{Jahre}$	<p>Theoreme der Analysis und der Wahrscheinlichkeitsrechnung</p> $p_1 = \lambda \Delta t, p_2 = \lambda \Delta t, \dots, p_n = \lambda \Delta t$ $\bar{p}_k = 1 - p; k = 1, 2, \dots, n$ $N_{t_k} = N_{t_k - \Delta t} \cdot \bar{p}_k$ $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$ $0 < \Delta t \ll \frac{1}{\lambda}$	<p>} Deduktkopf</p>
$N^{\text{Probe}}(t) = N_0^{\text{Probe}} e^{-\lambda t} = N_0^{\text{Vergleichsobjekt}} e^{-\lambda t}$ $\frac{N_0^{\text{Vergleichsobjekt}}}{N^{\text{Probe}}(t)} = e^{\lambda t}; \ln \frac{N_0^{\text{Vergleichsobjekt}}}{N^{\text{Probe}}(t)} = \lambda t$ $t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0^{\text{Vergleichsobjekt}}}{N^{\text{Probe}}(t)}$ $t = \frac{10^4}{1,2055} \ln \frac{8}{3} \text{ Jahre} = 8136 \text{ Jahre}$	$\bar{p}_k = 1 - p_k = 1 - \lambda \Delta t; k = 1, 2, \dots, n$ $N_0 =_{\text{abk}} N_{t_0}$ $N(\Delta t) = N_{t_1} = N_0 (1 - \lambda \Delta t)$ $N(2\Delta t) = N_{t_2} = N_{t_1} (1 - \lambda \Delta t) = N_0 (1 - \lambda \Delta t)^2$ <p style="text-align: center;">...</p> $N(n\Delta t) = N_{t_n} = N_0 (1 - \lambda \Delta t)^n$ $t =_{\text{abk}} n \Delta t$ $N(t) = N_{t_n} = N_0 \left( 1 - \frac{1}{n} \lambda t \right)^n$ $N(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_{t_n} = N_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \lambda t \right)^n = N_0 e^{-\lambda t}$	<p>} Herleitung</p>
<p>t = 8136 Jahre</p>	$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$	<p>} Ergebnis</p>
(a)	(b)	

Abbildung 2: (a) Dedukt zur Altersbestimmung einer Probe nach der C<sup>14</sup>-Methode und (b) Dedukt zur Herleitung des Zerfallsgesetzes nach SCHWEIDLER.

### 2.3 Wahrheit, Konsistenz, Kompaktheit und Homogenität

Nach den bisherigen Angaben dürfen in einem Deduktkopf beliebige, insbesondere aber auch beliebig viele Aussagen stehen; die Forderung nach wahren und konsistenten sowie nach kompakten und homogenen Aussagen schränkt diese Freiheit ein.

Damit das Ergebnis einer korrekten Herleitung wahr ist, müssen die Aussagen im Deduktkopf wahr sein. Für eine Deduktion ist dies von essentieller Bedeutung. In einer deduktiven Wissenschaft ist diese Anforderung gesichert, denn nach Voraussetzung sind Aussagen, die in einem Deduktkopf stehen, entweder wahr, weil es für sie eine Herleitung gibt, oder weil es so festgesetzt wurde.

Die Aussagen in einem Deduktkopf müssen konsistent sein, insbesondere dürfen sie sich nicht widersprechen. Der korrekte Konsistenzbegriff umfasst die logische, mathematische und erfahrungswissenschaftliche Ebene; wir übergehen hier eine genauere Charakterisierung.

Desweiteren ist es nicht sinnvoll, Aussagen mitzuschleifen, die bei der Herleitung nicht gebraucht werden. Es muss aber auch die Vollständigkeit gewährleistet sein, d.h. der Deduktkopf muss *alle* Aussagen enthalten, die zur Herleitung erforderlich sind. Verstößt man gegen diesen ehernen Grundsatz und lässt weitere Aussagen bei der Herleitung mit einfließen, macht man sich einer stillschweigenden nachträglichen Erweiterung des Deduktkopfes schuldig; die Herleitung wird dadurch ungültig. Überflüssige und fehlende Aussagen schließen wir aus durch die Forderung:

In einem Deduktkopf sind alle Aussagen zu streichen, die nichts zur Herleitung eines bestimmten Ergebnisses beitragen, und es sind alle Aussagen aufzunehmen, die für die Herleitung eines Ergebnisses benötigt werden. Welche Aussagen als überflüssig anzusehen sind und welche Aussagen nicht fehlen dürfen, hängt ganz von dem herzuleitenden Ergebnis ab.

Ein Deduktkopf ist kompakt, wenn er genau die für die Herleitung eines bestimmten Ergebnisses notwendigen Aussagen enthält.

Neben überflüssigen Aussagen müssen auch heterogene Dedukte ausgeschlossen werden. Ein Dedukt ist  $n$ -fach heterogen, wenn folgendes gilt:

Seine Aussagen im Deduktkopf seien zerlegbar in die Mengenpaare  $(\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)$ ,  $(\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2)$ , ...,  $(\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n)$ , wobei die Aussagenmengen  $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$  disjunkt sind; die eventuell auch leeren  $\mathbb{B}$ -Mengen brauchen es nicht zu sein. Ferner sei das Ergebnis des Deduktes zerlegbar in die disjunkten Mengen  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \dots, \mathbb{E}_n$ , wobei aus  $(\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)$  genau das Ergebnis  $\mathbb{E}_1$ , aus  $(\mathbb{A}_2, \mathbb{B}_2)$  genau das Ergebnis  $\mathbb{E}_2$  hergeleitet werden kann usw.

Ein heterogenes Dedukt entsteht, wenn unterschiedliche Dedukte zu einem einzigen Dedukt zusammengeschoben werden; dies schließen wir aus durch die Forderung:

Ist ein Dedukt  $n$ -fach heterogen, dann muss es aufgespalten werden in  $n$  einzelne Dedukte gemäß

$$\begin{array}{cccc}
 A_1 & A_2 & \dots & A_n \\
 \hline \hline
 B_1 & B_2 & \dots & B_n \\
 \hline \hline
 E_1 & E_2 & \dots & E_n
 \end{array}$$

Ein Deduktkopf, dessen Aussagen wahr, konsistent, kompakt und homogen sind, bezeichnen wir als strukturkorrekt.

### 3. Deduktgeflecht

Analysiert man den Inhalt wissenschaftlicher Lehrbücher, so wird man oft nur auf einzelne isolierte Dedukte stoßen. Sie deuten den deduktiven Charakter an, aber die Darstellung ist noch unbefriedigend. Entscheidend ist, dass zwischen den Dedukten ein bestimmter Zusammenhang besteht, und da, wo er noch nicht besteht, hergestellt werden muss; das Resultat ist ein Deduktgeflecht. Wir geben zunächst das Deduktionsprinzip an, beschreiben den Bauplan eines Geflechtes, führen das Geflechtattribut ein und werfen einen kurzen Blick auf nicht-deduktive Ansätze.

#### 3.1 Deduktionsprinzip

Beweisbarkeit ist die Grundidee, auf der alle deduktiven Wissenschaften aufbauen, ihr Kennzeichen ist daher die Beweisfähigkeit ihrer Aussagen. Leitend beim Aufbau eines Deduktgeflechtes ist daher das Deduktionsprinzip:

*Für jede unbewiesene Aussage muss grundsätzlich eine Herleitung möglich sein.*

In einem Deduktkopf dürfen Theoreme von anderen Dedukten stehen; für sie ist damit das Deduktionsprinzip automatisch erfüllt. Die übrigen Aussagen im Deduktkopf haben den Status von unbewiesenen Aussagen, deren Wahrheitswert festgelegt wurde, auf sie bezieht sich das Deduktionsprinzip. Es besagt nicht, dass für alle Aussagen bereits eine Herleitung existieren muss; es besagt nur, dass es keine grundsätzlich unbeweisbaren Aussagen gibt.

#### 3.2 Aufbau eines Deduktgeflechtes

Aus dem Deduktionsprinzip ergibt sich zwanglos, wie verschiedene strukturkorrekte Dedukte miteinander in Beziehung zu setzen sind. Das Dedukt besitzt ja schon die Struktur einer Herleitung, folglich legt die Herleitungsbeziehung die äußere Form eines Deduktgeflechtes fest: Jede unbewiesene Aussage in einem Deduktkopf bildet, bildlich gesprochen, einen Steckkontakt, auf den ein Nebenedukt gesteckt werden kann, dessen Ergebnisteil gerade aus dieser Aussage besteht; im Nebenedukt wird also die fragliche Aussage hergeleitet. Das Ergebnis ist ein Deduktgeflecht, das folgendermaßen rekursiv definiert ist:

- (a) Ein strukturkorrektes Dedukt ist ein Deduktgeflecht.
- (b)
  - (i)  $D$  ist ein strukturkorrektes Dedukt mit dem Ergebnis  $E$ ;
  - (ii)  $G$  ist ein Deduktgeflecht;
  - (iii)  $A$  ist eine unbewiesene Aussage aus einem der Deduktköpfe von  $G$ ;
  - (iv) es gelte  $A = E$ ;
 dann ist das Gebilde, das man erhält, wenn man in  $G$  die Aussage  $A$  an das Dedukt  $D$  koppelt, ebenfalls ein Deduktgeflecht.

Auch für ein Geflecht gibt es eine Qualitätsanforderung; es ist dies die Forderung nach Konsistenz, sie stellt eine Verallgemeinerung der Deduktconsistenz dar.

Beispiel: In Abbildung 2 wurden zwei Dedukte angegeben; das eine bezog sich auf die Altersbestimmung nach der  $C^{14}$ -Methode, es setzte das Zerfallsgesetz als bekannt voraus; das andere betraf die Herleitung dieses Gesetzes. Damit besteht nun die Möglichkeit, beide Dedukte an der Stelle, wo bei ihnen das Zerfallsgesetz erscheint, zu einem kleinen Geflecht zusammenzustecken (Abbildung 3). Das Verfahren ist iterierbar: Auch an anderen Stellen der Deduktköpfe können, wenn für die betreffenden Aussagen Herleitungen existieren, Dedukte angefügt werden. In Abbildung 3 wurde dies durch die Dedukte  $D_1$  und  $D_2$  angedeutet, welche Aussagen herleiten, die zur Herleitung des Zerfallsgesetzes benötigt werden. Es gibt keine grundsätzliche Schranke für die Verflechtung; sie kann allerdings nur soweit getrieben werden, wie der aktuelle Wissensstand reicht.

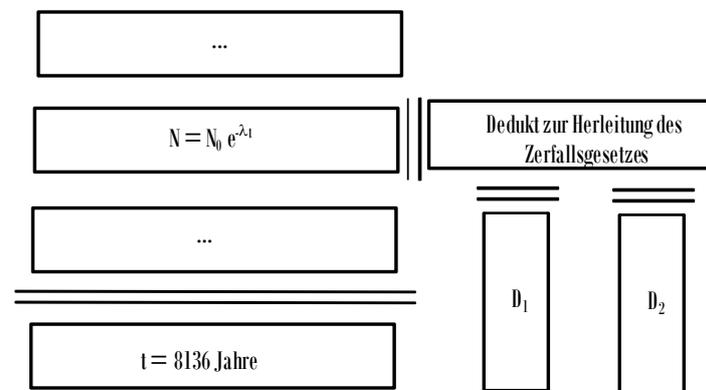


Abbildung 3: Schematische Kopplung der beiden Dedukte aus Abbildung 2 zu einem Deduktgeflecht an der Stelle, wo in beiden Dedukten das Zerfallsgesetz erscheint.  $D_1$  und  $D_2$  symbolisieren zwei Dedukte, welche zwei für die Herleitung des Zerfallsgesetzes erforderliche Aussagen herleiten.

Trotz ihrer einfachen Struktur können somit allein über die Herleitungsbeziehung Dedukte mit anderen Dedukten baukastenartig zu einem beliebig komplexen mehrdimensionalen Deduktgeflecht zusammengesetzt werden. Auf diese Weise kann mit einem Deduktgeflecht nicht nur ein Teilgebiet, sondern eine Wissenschaft als Ganzes erfasst werden mit Herleitungsübergängen zu anderen Wissenschaften: Zwei getrennte Deduktgeflechte lassen sich miteinander verbinden, wenn es in dem einen Geflecht eine Aussage gibt, die nur in dem anderen bewiesen werden kann.

Ein Deduktgeflecht stellt den Bauplan für alle deduktiven Wissenschaften dar. Mit Aussagen gefüllt, ergibt es das gewünschte Originalwissen in rechnergerechten Form, verlustfrei zum Originalwissen, aus dem es gewonnen wurde. Der Inhaltsverlust wird dadurch vermieden, dass die Aussagen in einem Deduktgeflecht in der gleichen Sprache erscheinen, die auch in der entsprechenden Erfahrungswissenschaft benutzt wird; in der Physik z.B. die mathematische Sprache. Außerdem: welche Aussagen in einen Deduktkopf aufzunehmen sind, hängt allein davon ab, was man mit ihm herleiten möchte, und welche Aussagen überhaupt infrage kommen, bestimmt der erfahrungswissenschaftliche Inhalt; hier ist nirgends Platz für Willkür.

Originalwissen wurde bislang nur informell als das Wissen bezeichnet, das in einem Lehrbuch zu finden ist. Nun gibt es aber über ein Teilgebiet im Allgemeinen mehrere Lehrbücher, in denen mehr oder weniger der gleiche Stoff behandelt wird. Welches Lehrbuch sollte man beim Aufbau eines Deduktgeflechtes zugrunde legen? Die Antwort ist einfach: Es gibt bei Geflechten kein Anfangs- bzw. Grundlagenproblem, denn anders als die an einem Axiomensystem orientierten, herkömmlichen Theorievorstellungen sind sie nicht hierarchisch strukturiert. Man kann also den Aufbau an irgendeiner Stelle mit irgendeinem Lehrbuchwissen beginnen und danach das Geflecht mit weiteren Angaben aus anderen Lehrbüchern ergänzen. Das so in einem Geflecht systematisch erfasste Originalwissen stellt somit eine Synthese dar, hervorgegangen aus dem in verschiedenen Lehrbüchern enthaltenen Wissen. Die Zielsetzung der Literaturrecherche ist dagegen eine ganz andere: hier ist man bemüht, möglichst alle Dokumente zugänglich zu machen, die zum gleichen Thema gehören.

Da durch die Systematisierung kein Inhalt verloren geht, verglichen mit dem Inhalt eines Lehrbuchs sich sogar ein Inhaltsgewinn ergeben kann, ist ein Deduktgeflecht auch für die zugehörige Einzelwissenschaft von Bedeutung: Die in einem Geflecht zum Ausdruck gebrachten Beziehungen ermöglichen ein tieferes Verständnis, das Geflecht selber kann als Forschungswerkzeug dienen, in ihm wird der aktuelle Stand einer noch im Fluss befindlichen Wissenschaft mit allen ihren Unvollkommenheiten festgehalten: Mit Herleitungslücken ist zu rechnen, sogar mit Inkonsistenzen. Eine Herleitung kann aus unterschiedlichen Gründen fehlen: Sie kann als nicht notwendig gelten, sie kann noch nicht ins Blickfeld des Interesses geraten sein oder man weiß ganz einfach noch nicht, wie sie aussehen müsste. Wenn Verdacht besteht, dass irgendetwas im Geflecht nicht stimmen kann, wird man versuchen, an entscheidender Stelle Herleitungslücken zu schließen und entdeckte Mängel zu beseitigen. Wissenschaftliche Praxis ist durch eine fortlaufende Arbeit am Geflecht charakterisiert, in deren Verlauf es sich stetig ändert. Es handelt sich hierbei um eine Wissensakkumulation, um eine evolutionäre Entwicklung also, nicht um Sprünge von einem Geflecht zu einem komplett anderen; auch werden keine Geflechte verdrängt oder falsifiziert.

Obwohl Dedukte einzeln betrachtet einleuchtend und ziemlich harmlos erscheinen, entfalten sie, zu einem Deduktgeflecht zusammengefügt, eine außerordentlich disziplinierende Wirkung auf die Darstellung wissenschaftlichen Wissens. Denn versucht man einen Lehrbuchstoff in einem Deduktgeflecht zu erfassen, so wird man feststellen, dass bei Herleitungen oft Voraussetzungen ungenannt bleiben, Herleitungen sich als fehlerhaft erweisen oder aus didaktischen Gründen methodische Zugeständnisse gemacht werden: All dies wird aufgrund der strengen Maßgaben sofort offenbar. Deduktgeflechte fordern dazu heraus, nicht nur überhaupt wissenschaftliches Wissen darzustellen, sondern es auch in einer systematischen Weise zu tun.

Man mag vielleicht einwenden, dass sich der Geflechtansatz hauptsächlich für solche Erfahrungswissenschaften eignet, die, wie die Physik, ihren Stoff bereits gut mathematisch aufbereitet haben. Nun ist solch eine Aufbereitung zweifelsohne sehr hilfreich, aber sie ist nicht notwendig, denn es sind ja auch logische Herleitungen zugelassen. In manchen Wissenschaften, die sich durchaus einer deduktiven Vorgehensweise rühmen, wäre es daher schon ein Fortschritt, wenn man versuchte, wenigstens einzelne isolierte Dedukte aufzustellen. Man kann dabei folgendermaßen vorgehen. Zunächst wählt man eine Aussage A aus, der man eine große Bedeutung beimisst. Man kann sie nun entweder im

Deduktkopf platzieren und versuchen, zusammen mit anderen Aussagen, Konsequenzen aus  $A$  herzuleiten, oder man fasst  $A$  als Ergebnis auf und stellt im Deduktkopf diejenigen Voraussetzungen zusammen, die für eine saubere Herleitung von  $A$  benötigt werden. Man wird vielleicht sehr überrascht sein über die Konsequenzen, die sich aus  $A$  ergeben, noch überraschter wird man vielleicht über die Voraussetzungen sein, die gelten müssen, damit sich  $A$  als wahre, d.h. herleitbare Aussage erweist. Ein Dedukt zusammenstellen kann sich zu einer sehr lehrreichen und fruchtbaren Tätigkeit entwickeln.

### 3.3 Geflechtattribut

Die Symbole in den Aussagen eines Geflechtes stehen für mathematische oder logische Variablen, Operationen und Relationen. Sie sind formal, d.h. sie haben dort keine erfahrungswissenschaftliche Bedeutung: es bleibt offen, worauf sie sich beziehen sollen. Jedem Geflecht kann jedoch ein Attribut zugeordnet werden, in dem die Interpretation der Symbole festgelegt wird. Das Geflechtattribut ist ebenfalls ein Schema und als solches nicht wahrheitswertdefinit; wir stellen es inform einer dreispaltigen Tabelle dar. Die erste Spalte enthält die zu interpretierenden Symbole, die zweite ihre formale und die dritte ihre anwendungsbezogene Bedeutung. Bei der ersten Bedeutungszuweisung wird einem Symbol ein Sprachbegriff, bei der zweiten ein Begriff aus der Anwendung zugeordnet. Tabelle 1 zeigt als Beispiel einen Ausschnitt aus einem physikalischen Geflechtattribut.

mathematisches Symbol	formale Interpretation	physikalische Interpretation
$x, y, z$	kartesische Koordinaten	Lage eines Objekts
$V(x, y, z)$	reelle Funktion	Potentialfunktion
$L$	positive rationale Zahl	Länge
...	...	...

Tabelle 1: Ausschnitt aus einem physikalischen Geflechtattribut.

*Durch das Geflechtattribut erhalten die bedeutungslosen Symbole eine Bedeutung. Doch diese Zuweisung darf keinen Einfluss auf die Herleitung haben, d.h. von den Angaben in einem Geflechtattribut darf bei der Herleitung kein Gebrauch gemacht werden.*

### 4. Abhängigkeit von Aussage und Begriff

In den Deduktgeflechten kommen Begriffe nicht explizit vor. Man kann zwar für die Aussagen in einem Deduktkopf und für die Größen, die in ihnen auftreten, Begriffe einführen, ebenso für den Objektbereich, aber auf die Herleitung hat das keinen Einfluss: Man kann sie ausführen, ohne sich um die Bedeutung der Größen, mit denen man hantiert, kümmern zu müssen. Begriffe dienen hier lediglich als Orientierungshilfe und Gedächtnisstütze, in manchen Fällen können sie das Verständnis vertiefen.

Es gibt zwei Möglichkeiten einen Begriff einzuführen: (1) durch eine explizite Definition, d.h. durch Angabe der Merkmale aller Objekte, die durch die Definition zu einer Objektmenge zusammengefasst werden sollen; das ist die traditionelle Methode, und (2) durch eine implizite Definition, d.h. durch Angabe von Aussagen, die als wahr festgesetzt wurden und in denen die fraglichen Begriffe vorkommen; diese Methode erwähnt wohl

erstmal GERGONNE, wenn auch noch sehr metaphorisch.<sup>4</sup> Etwas konkreter äußerte sich HILBERT in seinen *Grundlagen der Geometrie* zu impliziten Definitionen.<sup>5</sup> In seinem Aufsatz *Mathematische Probleme* heißt es: »Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe ... «<sup>6</sup> Insbesondere der im letzten Satz ausgesprochenen Auffassung widersprach FREGE in seinem Briefwechsel mit HILBERT vehement. Er vertrat den traditionellen philosophischen Standpunkt und behauptete: »Axiome und Lehrsätze können ... nie die Bedeutung eines in ihnen vorkommenden Zeichens oder Wortes erst festsetzen wollen, die vielmehr schon feststehen muss.«<sup>7</sup> Er scheint also die Möglichkeit von impliziten Definitionen zu leugnen. HILBERT reagierte reserviert höflich, beharrte aber auf seinem Standpunkt und brach nach wenigen Briefen den Briefwechsel ab. Offensichtlich hatten FREGE und HILBERT zwei miteinander unvereinbare Definitionsarten im Sinn; das veranschaulicht die folgende Gegenüberstellung. Sei  $F\{x\}$  eine Aussage  $F$  über das Objekt  $x$ , dann ergibt sich:

#### Aussagenbasierte Methode (implizite Definition)

$F\{x\}$  wird als wahr *festgelegt* für alle  $x$  aus dem Objektbereich  $\mathbb{O}_F$  der Aussage  $F$ .

Dann ist der Wahrheitswert der Aussage genau bekannt; der Objektbereich  $\mathbb{O}_F$  jedoch nicht; er kann auch leer sein.

Begriff  $A$  mit dem Umfang = Objektbereich  $\mathbb{O}_F$  wird implizit „definiert“ durch die Festlegung

$F\{x\} = \text{wahr}$  für alle  $x$  aus  $\mathbb{O}_F$ .

Wissenschaftliche Tradition: (GERGONNE) ... HILBERT ...

#### Begriffsbasierte Methode (explizite Definition)

Begriff  $B$  mit dem Begriffsumfang (=Objektmenge)  $\mathbb{O}_B$  wird *festgelegt*.

Dann ist  $\mathbb{O}_B$  genau bekannt; der Wahrheitswert von  $F\{x\}$  für alle  $x$  aus  $\mathbb{O}_B$  jedoch nicht;  $F\{x\}$  kann auch falsch sein.

Philosophische Tradition: ARISTOTELES ... KANT ... FREGE ...

Bei der *aussagenbasierten Methode* unterteilt eine von vornherein als wahr festgelegte Aussage die Objekte automatisch in solche, für welche die Aussage falsch, und in solche, für welche die Aussage wahr ist; letztere „definieren“ dann implizit den Objektbereich der Aussage, er ist jedoch nicht genau bekannt. Bei der *begriffsbasierten Methode* legt man zuerst durch eine explizite Definition eine bestimmte Objektmenge exakt fest, jedoch bleibt jetzt der Wahrheitswert der Aussage unsicher. Man hat also die Wahl zwischen einer wahren Aussage bei einem unscharfen Objektbereich  $\mathbb{O}_F$  und einer exakt definierten Objektmenge  $\mathbb{O}_B$  bei einem ungesicherten Wahrheitswert der Aussage. Entsprechendes gilt, wenn

<sup>4</sup> GERGONNE 1818-1819: *Essai sur la théorie des définitions*, S. 23.

<sup>5</sup> HILBERT 1903: *Grundlagen der Geometrie*, S. 2.

<sup>6</sup> HILBERT 1935: *Mathematische Probleme*, S. 264/S. 299f; siehe auch in: FREGE<sup>S</sup> *Briefwechsel* 1980, S. 21f.

<sup>7</sup> FREGE an HILBERT (27.12. 1899) in: FREGE<sup>S</sup> *Briefwechsel* 1980, S. 8f. Ähnlich: FREGE an HILBERT am 27.12. 1899, 6.1.1900 und 16.9.1900 in: FREGE<sup>S</sup> *Briefwechsel* 1980, S. 6 – 10, S. 14 – 20 und S. 21f.

mehrere Aussagen im Spiel sind. So gesehen scheinen beide Methoden gleich gut bzw. gleich schlecht zu sein; welcher Methode sollte man den Vorzug geben? Die Antwort fällt eindeutig zugunsten der aussagenbasierten aus:

Im traditionellen begriffsbasierten Weltbild sind die Wahrheitswerte der Aussagen unsicher, das hat überflüssige Begründungs- und Rechtfertigungsprobleme zur Folge. Außerdem werden im allgemeinen Objektmengen definiert, die aus unendlich vielen Objekten bestehen. Um die Wahrheit einer Aussage zu ermitteln, müsste man sie an allen Objekten überprüfen: das führt zum ebenfalls überflüssigen Induktionsproblem.

Im aussagenbasierten Weltbild dagegen kann es keine Begründungs- und Rechtfertigungsprobleme geben, denn hier sind die Aussagen wahr entweder durch Beweis oder durch Festsetzung. Durch eine ungeschickte Auswahl der Aussagen kann jedoch der Objektbereich leer sein. Um zu zeigen, dass eine Aussage oder ein Aussagensystem sinnvoll ist, muss man also zeigen, dass der zugehörige Objektbereich nicht leer ist. Für solch einen Nachweis sind nur *endlich viele* Überprüfungen erforderlich: in diesem Weltbild gibt es daher auch kein Induktionsproblem.

Aussagenbasierter und begriffsbasierter Ansatz repräsentieren zwei miteinander unvereinbare Weltbilder. Diese Unvereinbarkeit überträgt sich auch auf die aussagenbasierte und begriffsbasierte Wissensdarstellung; sie ist Gegenstand folgenden Kapitels.

## 5. Deduktgeflechte und Ontologien

Die Aussagen in einem Deduktgeflecht enthalten das Wissen einer deduktiven Wissenschaft; Wissen in einem Geflecht darstellen, ist somit eine spezielle aussagenbasierte Methode der Wissensrepräsentation. Eine Ontologiesprache gilt ebenfalls als Werkzeug der Wissensrepräsentation. Wie steht es mit der Leistungsfähigkeit dieser beiden Darstellungsformen? Im Folgenden wird gezeigt, dass man mit einer begriffsbasierten Ontologie, im Gegensatz zu einem Deduktgeflecht, keine deduktive Wissenschaft darstellen kann.

Was eine Ontologie ist und welche Struktur sie besitzt, darüber gibt es in der Literatur nur "phänomenologische" Definitionen der Form: »In the context of computer and information sciences, an ontology defines a set of representational primitives with which to model a domain of knowledge or discourse. The representational primitives are typically classes (or sets), attributes (or properties), and relationships (or relations among class members). The definitions of the representational primitives include information about their meaning and constraints on their logically consistent application.«<sup>8</sup> Andere Autoren äußern sich ebenso unbestimmt oder verzichten ganz auf genauere Angaben. Häufig wird man nur mit Programmcode konfrontiert.<sup>9</sup> In manchen einschlägigen Lehrbüchern geht es überhaupt nur um Ontologiesprachen,<sup>10</sup> so dass man auch definieren könnte, eine Ontologie sei charakterisiert durch das, was sich durch solch eine Sprache ausdrücken lasse.<sup>11</sup>

Aus allen Angaben kristallisiert sich die in Abbildung 4 gezeigte, schon von den semantischen Netzen her bekannte Grundstruktur heraus: Zwei Begriffe werden durch eine

<sup>8</sup> GRUBER 2009: *Ontology*.

<sup>9</sup> Etwa in den Arbeiten von GRUBER.

<sup>10</sup> Z.B. bei HITZLER et al. 2008: *Semantic Web*.

<sup>11</sup> HITZLER et al. 2008: *Semantic Web*, S. 12.

bestimmte Relation miteinander verknüpft, z.B. die Begriffe A und B mit der Relation  $R_1$ . Es handelt sich also um einen gerichteten Graphen, also um eine Menge von Knoten (Begriffe), die durch gerichtete Kanten (Relationen) miteinander verbunden werden. Für unseren Beweis genügt es festzuhalten, dass die Aussagen in einer Ontologie Begriffe voraussetzen, die explizit definiert werden müssen.

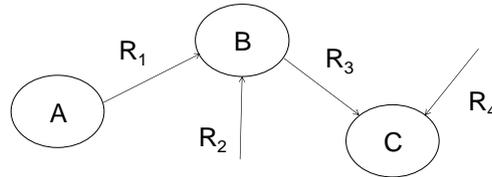


Abbildung 4: Ausschnitt aus einer Ontologie.

Das deduktive Verfahren setzt zwingend die Wahrheit der Prämissen, also die Wahrheit der Aussagen in den Deduktköpfen voraus. Aus dem Abhängigkeitsverhältnis von Aussage und Begriff aber folgt, dass nur mit einer aussagenbasierten, nicht jedoch mit einer begriffsbasierten Methode die Wahrheit gesichert werden kann. Sofern für eine Aussage kein Beweis vorliegt, kann die Wahrheit nur durch eine Festlegung garantiert werden. Folglich kommt für die Darstellung einer deduktiven Wissenschaft nur die aussagenbasierte Methode infrage. Die begriffsbasierte Methode dagegen kann die Wahrheit der Prämissen nicht garantieren und erfüllt damit nicht die Voraussetzung für das deduktive Verfahren: sie eignet sich nicht zur Darstellung einer deduktiven Wissenschaft.

## Literatur

- FREGE<sup>S</sup> Briefwechsel: *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*. Mit Einleitungen, Anmerkungen und Register herausgegeben von GOTTFRIED GABRIEL, FRIEDRICH KAMBARTEL, CHRISTIAN THIEL. Hamburg: Meiner Verlag 1980.
- GERGONNE, JOSEPH DIAZ: Essai sur la théorie des définitions. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, **9** (1818-1819), S. 1 – 35. < [http://www.numdam.org/item?id=AMPA\\_1818-1819\\_\\_9\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1818-1819__9_1_0) > (abgerufen am 18.10.11).
- GRUBER, THOMAS R.: Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. *International Journal Human-Computer Studies*, **43** (1995), S. 907 – 928 (Internetversion S. 1 – 22). < <http://tomgruber.org/writing/onto-design.pdf> > (abgerufen am 12.01.13)
- GRUBER, TOM: Ontology. In: LING LIU & M. TAMER ÖZSU (Eds.), *Encyclopedia of Database Systems*, Springer - Verlag 2009. < <http://tomgruber.org/writing/ontology-definition-2007.htm> > (abgerufen am 12.01.13).
- HILBERT, DAVID: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig/Berlin: B. G. Teubner Verlag 1930.
- HILBERT, DAVID: 17. Mathematische Probleme. In: *Gesammelte Werke Band III*. Berlin: Julius Springer 1935, S. 290 – 329.
- HITZLER, PASCAL; KRÖTZSCH, MARKUS; RUDOLPH, SEBASTIAN & SURE, YORK: *Semantic Web. Grundlagen*. Berlin & Heidelberg: Springer – Verlag 2008, Reihe eXamen.press.
- JAENECKE, PETER: Wissensbausteine. *Wolfenbütteler Notizen zur Buchgeschichte*, **27**, (2002), Heft 2, S. 183 – 197. < [http://www.peterjaenecke.de/Wissensordnung\\_und\\_Wissensorganisation.html](http://www.peterjaenecke.de/Wissensordnung_und_Wissensorganisation.html) >.
- SALOMAA, ARTO K.: *Formale Sprachen*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1978. Englischsprachige Originalausgabe: *Formal Languages*, New York: Academic Press 1973.