Peter Jaenecke

Über die Verwirklichung des Calculemus-Gedankens in der Aussagenlogik[1]

Zusammenfassung

Nach der Übersicht über die Grundzüge des Calculemus-Gedankens wird die arithmetische Darstellung der Aussagenlogik eingeführt und ihre Handhabung an Lösungsbeispielen für das aussagenlogische Entscheidungsproblem erläutert. Die Entscheidungsprobleme für strittige inhaltliche Aussagen werden auf Schlußfolgerungen und diese auf die Lösung von Gleichungssystemen zurückgeführt. Die arithmetische Darstellung erleichtert nicht nur den Umgang mit der Aussagenlogik, sondern bietet auch die Chance, bekannte Probleme von einem neuen Standpunkt aus zu überdenken. So folgt aus dem Schlußfolgerungsansatz, daß das sogenannte Münchhausen-Trilemma den Begründungsanspruch nicht einengt, weil es auf einer speziellen Schlußfolgerungsart beruht; aus dem gleichen Grund entfällt das Anfangsproblem. Der Unentscheidbarkeitssatz der Prädikatenlogik und der Unvollständigkeitssatz von Gödel werden oft als Beweis für die Undurchführbarkeit des Calculemus-Gedankens angesehen. Dieses Argument gilt jedoch nur dann, wenn sich nachweisen läßt, daß ein Zusammenhang besteht zwischen den Schlußfolgerungen und dem, was in jenen Sätzen ausgesagt wird.

1 Charakterisierung des Calculemus-Gedankens

Leibniz äußert mehrfach den Gedanken, strittige Ansichten rechnerisch zu klären:

„Wenn es möglich wäre, Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ebenso gradlinig und stringent auszudrücken wie die Arithmetik die Zahlen oder wie die Geometrie die Figuren darstellt, dann könnten alle Gegenstände, *soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind*, in der gleichen Weise behandelt werden wie es in der Arithmetik und Geometrie getan wird.“[2]

„Zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte, da es leicht wäre, die Rechnung zu prüfen ... und wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "rechnen wir".“[3]

„Das einzige Mittel, *unsere Schlußfolgerungen zu verbessern*, ist, sie ebenso anschaulich zu machen wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und wenn es Streitigkeiten ... gibt, man nur zu sagen braucht ‚rechnen wir' ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat.“[4]

„ ... um Kontroversen in den Gebieten auszuschließen, die vom Schlußfolgern abhängen. Denn *dann wird Schließen und Rechnen dieselbe Sache sein*.“[5]

Heute würden wir sagen:

(a) Es ist eine Darstellung für unser Wissen zu finden, in der Rechenoperationen definiert sind („Symbole oder Zeichen zu finden, die sich dazu eigneten, alle unsere Gedanken ... “).
(b) Strittige Ansichten lassen sich in diese Darstellung bringen, so daß es möglich ist, durch Berechnungen zu entscheiden, welche Ansicht die richtige ist („wenn jemand an dem, was ich vorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: "rechnen wir"“).
(c) Berechnungen beruhen auf allgemein anerkannten Rechenregeln, so daß ein Ergebnis nur darauf hin überprüft werden muß, ob bei der Anwendung der Regeln ein Fehler unterlief; ist das nicht der Fall,

---

[1] Aus: Herbert Breger, Jürgen Herbst & Sven Erdner (Hrsg.), *Einheit in der Vielheit. VIII. Internationaler Leibnizkongreß Hannover, 24. – 29. Juli 2006*, Vorträge 1. Teil, S. 338-345.
[2] Leibniz, Gottfried Wilhelm: „Sämtliche Schriften und Briefe“. Hrsg. von der Preußischen (später: Berlin-Brandenburgischen und Göttinger) Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Darmstadt (später: Leipzig, zuletzt: Berlin) 1923 ff, (A) VI.4 S. 6 = „Opuscules et fragments inédits de Leibniz“, hrsg. von L. Couturat. Paris 1903 (C) S. 155 = „Fragmente zur Logik“, hrsg. von Franz Schmidt, Akademie-Verlag, Berlin 1960 (X), S. 90; Hervorhebung von Leibniz.
[3] A VI.4 6 = C 156 = X 91. Ferner „ein Federstrich würde viel Geschrei erspart haben“ (A VI.4 965 = VE 689 = X 17).
[4] A VI.4 964 = C 176 = X 16; Hervorhebung P.J.
[5] A VI.6 1030 = C 27f = X 451; Hervorhebung P.J. Es gibt zahlreiche andere Belege dafür, daß sich der Calculemus-Gedanke auf Schlußfolgerungen bezieht.

muß jeder Einsichtige das Ergebnis akzeptieren („zudem würde man jeden von dem überzeugen, was man gefunden oder erschlossen hätte ...“).

(d) Berechnungen vereinfachen den Gedankengang, so daß durch sie Sicherheit und Überzeugungskraft gewonnen wird („da es leicht sein würde, die Rechnung zu prüfen“).

(e) Es sind die Schlußfolgerungen, die einer rechnerischen Behandlung zugänglich gemacht werden sollen, und folglich kommt für dieses Vorhaben nur deduktiv handhabbares Wissen in Frage („alle Dinge, soweit sie dem Schlußfolgern unterworfen sind“, „unsere Schlußfolgerungen verbessern“, „Schließen und Rechnen wird dieselbe Sache sein“).

In diesen Zitaten betont Leibniz das Rechnen; andernorts spricht er etwas allgemeiner vom Operieren mit Zeichen. Obwohl damit auch Rechnen gemeint sein kann, ist es sinnvoll, zwischen der Manipulation von Zeichenketten und dem Rechnen zu unterscheiden. Durch die erste Art von Zeichenoperationen wird auf syntaktischem Weg eine Entscheidung herbeigeführt; sie fällt in das Gebiet der formalen Sprachen. Die zweite Art ist allgemein bekannt; hier geht es um die Bestimmung von Zahlenwerten. Beide Arten können auf dem gleichen Gebiet nebeneinander zum Einsatz kommen. So sind in der Aussagenlogik Berechnungen möglich, andererseits bildet die Menge ihrer wohlformulierten Formeln eine formale Sprache, mit deren Grammatik sich entscheiden läßt, ob eine gegebene Formel wohlformuliert ist oder nicht.

Leibniz beschäftigte sich mit beiden Arten ohne sie genau zu trennen. Seine Ideen über die Manipulation von Zeichenketten wurden bereits an anderer Stelle untersucht;[6] hier geht es um die rechnerische Thematik. Wir werden zeigen, daß der Calculemus-Gedanke sich vollständig verwirklichen läßt, wenn man als Basis für die Darstellung von Wissen die Aussagenlogik in arithmetischer Form wählt.

2 Arithmetische Darstellung der Aussagenlogik

Aussagenlogische Ausdrücke werden traditionsgemäß mit Junktoren wie $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ gebildet. In dieser junktoriellen Darstellung sind Berechnungen im Sinne von Leibniz nicht möglich. Es gibt jedoch auch eine wenig bekannte, bereits 1927 von Žegalkin[7] eingeführte arithmetische Darstellung, die auf der Restklassenarithmetik Modulo 2 mit den beiden Operationen Multiplikation und Addition beruht und in der nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen. In dieser Arithmetik gelten die gleichen Regeln wie in der herkömmlichen, mit Ausnahme der beiden Regeln

(1) $$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} + \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{p} \in \{0,1\},$$

aus denen unmittelbar der Satz

(2) wenn $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ dann auch $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

folgt, der beim Umformen von Gleichungen gebraucht wird. Diese Arithmetik ist der Aussagenlogik isomorph.[8] Die folgende Tabelle enthält die Gegenüberstellung der beiden Darstellungen für die bekanntesten aussagenlogischen Verknüpfungen.

---

[6] Jaenecke, Peter: „Wissensdarstellung bei Leibniz“, in: Friederich Hermanni & Herbert Breger: *Leibniz und die Gegenwart.* Wilhelm Fink Verlag, München 2002, S. 89-118; siehe auch: http://www.bonn.iz-soz.de/wiss-org/Jaenecke02_Wissensdarstellung%20bei%20Leibniz.pdf.

[7] Žegalkin, I. I.: „Über die Technik der Berechnung von Sätzen in der symbolischen Logik“ (russ.), *Matematiceskij Sbornik* (*Mathematische Sammlung*) **34** (1927), S. 9-28.

[8] Stone, M. H.: „The theory of representations for Boolean algebras.“ *Transactions of the American Mathematical Society*, **40** (1936), S. 37-111.

Operation	Junktorielle Darstellung	Arithmetische Darstellung
	wahr	1
	falsch	0
Negation	$\neg\mathbf{p}$	$\mathbf{p}+1$
Konjunktion	$\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}$	$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$
Exklusives Oder	$\mathbf{p}\curlyvee\mathbf{q}$	$\mathbf{p}+\mathbf{q}$
Disjunktion	$\mathbf{p}\vee\mathbf{q}$	$\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{pq}$
Implikation	$\mathbf{p}\rightarrow\mathbf{q}$	$\mathbf{p}+\mathbf{pq}+1$
Äquivalenz	$\mathbf{p}\leftrightarrow\mathbf{q}$	$\mathbf{p}+\mathbf{q}+1$
Sheffer Strich	$\mathbf{p}\mid\mathbf{q}$	$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}+1$

Nach Voraussetzung soll sich die Aussagenlogik dazu eignen, das Wissen eines Sachgebietes zu erfassen. Über ihre arithmetische Darstellung ist es dann möglich, Berechnungen nach bekannten Regeln auszuführen, wobei insbesondere die Sonderregeln (1) die Arbeit erheblich vereinfachen.

3 Arithmetische Lösung des aussagenlogischen Entscheidungsproblems

Für einen aussagenlogischen Ausdruck gibt es drei Möglichkeiten: Entweder er ist immer wahr (Tautologie), oder er ist immer falsch (Kontradiktion) oder sein Wahrheitswert hängt noch von den Wahrheitswerten seiner Variablen ab (neutraler Ausdruck). Gegeben seien bestimmte Ausdrücke; es gilt herauszufinden, zu welcher Kategorie sie gehören. Die folgenden Beispiele zeigen, daß sich dieses aussagenlogische Entscheidungsproblem leicht arithmetisch lösen läßt:[9]

$$\neg\neg\mathbf{p} = \neg(\neg\mathbf{p}) =_T (\mathbf{p}+1)+1 = \mathbf{p}$$
$$\mathbf{p}\wedge(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}) =_T \mathbf{p}\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{pq}) = \mathbf{p}+\mathbf{pq}+\mathbf{pq} = \mathbf{p}$$
$$\mathbf{p}\rightarrow(\mathbf{q}\rightarrow\mathbf{p}) =_T \mathbf{p}+\mathbf{p}(\mathbf{q}+\mathbf{qp}+1)+1 = \mathbf{p}+\mathbf{pq}+\mathbf{qp}+\mathbf{p}+1 = 1$$

In den ersten beiden Fällen handelt es sich somit um neutrale Ausdrücke, der letzte Fall ist eine Tautologie. Zum Entscheidungsproblem äquivalent ist die Aufgabe, einen Ausdruck auf seine einfachste Form zu bringen, die dann erreicht ist, wenn sich keine arithmetische Regel mehr sinnvoll auf ihn anwenden läßt.

4 Schlußfolgerungen

Der vorherige Abschnitt betraf die Lösung logischer Aufgaben; Leibniz dachte aber insbesondere daran, inhaltliche Streitfragen auf arithmetische Weise zu entscheiden, und zwar auf allen Gebieten, die zugänglich sind für Schlußfolgerungen. Dazu müssen wir zunächst klären, was unter einem logischen Schluß zu verstehen ist. Bekanntestes Schulbeispiel ist der Modus ponens

$$\begin{array}{lll} \mathbf{W}(\mathbf{p_1},\mathbf{p_2}): & \mathbf{p_1}\rightarrow\mathbf{p_2} = \mathrm{w} & \mathbf{p_1}+\mathbf{p_1p_2}+1 = 1 \\ \mathbf{A}(\mathbf{p_1}): & \mathbf{p_1} = \mathrm{w} & \mathbf{p_1} = 1 \\ \hline \mathbf{K}(\mathbf{p_2}): & \mathbf{p_2} = \mathrm{w} & \mathbf{p_2} = 1 \end{array}$$

links in junktorieller, rechts in arithmetischer Darstellung. Dabei ist $\mathbf{W}$ die erste Prämisse, $\mathbf{A}$ die zweite und $\mathbf{K}$ die Konklusion. Es handelt sich um einen sehr einfachen Schluß. Im allgemeinen bestehen $\mathbf{W}$, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{K}$ nicht nur jeweils aus einer einzigen Gleichung, vielmehr können es beliebig viele, jedoch nicht unendlich viele sein. Die Bezeichnung ‚erste und zweite Prämisse' ergibt dann keinen Sinn mehr. Im folgenden sei $\mathbf{W}$ eine Wissensbasis, in der das Wissen eines Sachgebietes zusammengefaßt ist und $\mathbf{A}$ eine Menge von Annahmen, die auch leer sein kann.

[9] Mit ‚ $=_T$ ' wird die Transformation vom junktoriellen in den arithmetischen Ausdruck gekennzeichnet.

Bereits aus dem einfachen Modus ponens kann man herauslesen, daß $\mathbf{W}$, $\mathbf{A}$ und $\mathbf{K}$ die Form von Gleichungssystemen haben, daß eine Schlußfolgerung demnach im Lösen des aus $\mathbf{W}$ und $\mathbf{A}$ zusammengesetzten Systems besteht. Wie bei jedem Gleichungssystem, gibt es auch hier verschiedene Lösungsarten, d.h. in der Konklusion können unterschiedliche Gleichungstypen vorkommen. Lösungen der Form $\mathbf{p} = 1\ (= \mathrm{w})$ bzw. $\mathbf{p} = 0\ (= \mathrm{f})$ heißen Elementarlösungen. So führt z.B. der Schluß

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{W}_1(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & [(\mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}_2) \vee \mathbf{p}_3] \to \neg\mathbf{p}_4 = \mathrm{f} & [(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1) + \mathbf{p}_3 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1)\mathbf{p}_3] + \\
 & & +[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1) + \mathbf{p}_3 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1)\mathbf{p}_3](\mathbf{p}_4 + 1) = 1 \\
\mathbf{W}_2(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & (\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2) \wedge \mathbf{p}_3 = \mathrm{w} & (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\mathbf{p}_3 = 1 \\
\mathbf{A}(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & \neg(\mathbf{p}_3 \to \mathbf{p}_2) = \mathrm{w} & \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_3\mathbf{p}_2 + 1 + 1 = 1 \\
\hline
\mathbf{K}_1(\mathbf{p}_4): & \neg\mathbf{p}_4 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_4 = 0 \\
\mathbf{K}_2(\mathbf{p}_3): & \mathbf{p}_3 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_3 = 1 \\
\mathbf{K}_3(\mathbf{p}_1): & \mathbf{p}_1 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_1 = 1 \\
\mathbf{K}_4(\mathbf{p}_2): & \neg\mathbf{p}_2 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_2 = 0
\end{array}
$$

nur auf solche Elementarlösungen, ein Fall, der lediglich bei bestimmten Fragestellungen interessant ist, denn er besagt, daß die Wahrheitswerte aller im System vorkommenden Aussagen bekannt und für diese Wissensbasis somit alle Fragen geklärt sind. Um das Gleichungssystem über die Regeln (1) und den Satz (2) zu lösen, beginnt man zweckmäßigerweise bei der letzten Gleichung, aus der wegen $\mathbf{p}_3(1+\mathbf{p}_2) = 1$ unmittelbar $\mathbf{p}_3 = 1$ und $\mathbf{p}_2 = 0$ folgt. Dieses Ergebnis in die zweite Gleichung eingesetzt, ergibt $\mathbf{p}_1 = 1$; die erste Gleichung liefert schließlich $\mathbf{p}_4 = 0$. Bei dem Schluß

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{W}_1(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & [(\mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}_2) \vee \mathbf{p}_3] \to \neg\mathbf{p}_4 = \mathrm{f} & [(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1) + \mathbf{p}_3 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1)\mathbf{p}_3] + \\
 & & +[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1) + \mathbf{p}_3 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + 1)\mathbf{p}_3](\mathbf{p}_4 + 1) = 1 \\
\mathbf{W}_2(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & (\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2) \wedge \mathbf{p}_3 = \mathrm{w} & (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\mathbf{p}_3 = 1 \\
\mathbf{W}_3(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3): & [\neg(\mathbf{p}_3 \to \mathbf{p}_2)] \to \mathbf{p}_5 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 + 1 + 1 + (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_3 + 1 + 1)\mathbf{p}_5 + 1 = 1 \\
\hline
\mathbf{K}_1(\mathbf{p}_4): & \neg\mathbf{p}_4 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_4 = 0 \\
\mathbf{K}_2(\mathbf{p}_3): & \mathbf{p}_3 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_3 = 1 \\
\mathbf{K}_3(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2): & \mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2 = \mathrm{w} & \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = 1 \\
\mathbf{K}_4(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_5): & \neg(\neg\mathbf{p}_2 \wedge \neg\mathbf{p}_5) = \mathrm{w} & (\mathbf{p}_2 + 1)(\mathbf{p}_5 + 1) = 0
\end{array}
\tag{3}
$$

bleiben hingegen zwei Gleichungen unaufgelöst und somit noch Antworten offen. Neben den elementaren und unaufgelösten Gleichungen gibt es noch Lösungen der Form $0 = 0$ oder $0 = 1$. Der erste Fall zeigt redundante Gleichungen an, der letzte offenbart einen Widerspruch im System.

5 Verwirklichung des Calculemus-Gedankens durch den Schlußfolgerungsansatz

Es gibt verschiedene Arten von strittigen Fragen, die jedoch alle auf Schlußfolgerungen aus dem System $\mathbf{W}$ und $\mathbf{A}$ zurückgeführt werden können. Sie unterscheiden sich lediglich durch den Status der Annahmen $\mathbf{A}$ sowie durch die Art und Weise, wie die Konklusion $\mathbf{K}$ ausgewertet wird. $\mathbf{W}$ ist in allen Fällen die Wissensbasis, die das Wissen eines Sachgebietes enthält. Anders aber als Leibniz annahm, wird sich nur im günstigsten Fall unmittelbar herausstellen, wer recht hat, nämlich dann, wenn sich für die fraglichen Fälle Elementarlösungen ergeben. Doch $\mathbf{A}$ kann auch redundante Lösungen oder sogar einen Widerspruch bewirken; außerdem können gerade dort unaufgelöste Gleichungen stehen bleiben, wo man sich eine Antwort erhoffte. Solche uneindeutigen Ergebnisse rühren entweder von den Unzulänglichkeiten der Wissensbasis her oder werden durch die Annahmen verursacht; sie betreffen nicht die Berechenbarkeit des Problems.

Zur Vereinfachung beschreiben wir bei den folgenden Beispielen eine Schlußfolgerung durch das Zeilenschema

$$\mathbf{W}, \mathbf{A} \mapsto \mathbf{K}\,.$$

Man wird zweckmäßigerweise wie beim Schluß (3) zunächst nur das Gleichungssystem einer Anfangswissensbasis $\mathbf{W_0}$ soweit es geht lösen, d.h. man wird den Schluß

$$\mathbf{W_0} \mapsto \mathbf{W}$$

ausführen. Dabei bleiben alle redundanten Gleichungen auf der Strecke, außerdem werden durch Ergebnisse der Form $0=1$ Widersprüche in $\mathbf{W_0}$ angezeigt. Bevor man fortfahren kann, müssen zunächst diese beseitigt werden. Wir erhalten dann mit der Konklusion $\mathbf{W}$ eine gewissermaßen gereinigte Wissensbasis, die äquivalent ist zu $\mathbf{W_0}$, aber möglicherweise eine einfachere Struktur besitzt als jene; sie ist die bei allen Streitfällen zugrundegelegte Basis.

(a) Schlußfolgerung durch Ableiten der strittigen Aussagen: $\underbrace{\mathbf{W}}_{unstrittig}, \underbrace{\mathbf{A}}_{unstrittig} \mapsto \mathbf{K}(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \ldots)$

Streitpunkt sind die Aussagen $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots$ unter der Voraussetzung, daß die Menge der Annahmen $\mathbf{A}$ und die Wissensbasis $\mathbf{W}$ unstrittig sind. Der Streitfall ist entschieden, wenn sich für die $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots$ in der Konklusion Elementarlösungen ergeben, d.h. wenn sie sich aus $\mathbf{W}$ und $\mathbf{A}$ ableiten lassen.

(b) Begründung: $\underbrace{\mathbf{W}}_{unstrittig}, \underbrace{\mathbf{A}}_{strittig} \mapsto \mathbf{K}$

Streitpunkt ist die Frage, ob sich die Annahmen $\mathbf{A}$ durch die Wissensbasis $\mathbf{W}$ begründen lassen. Wir verwenden ein schwaches Kriterium: Die Annahmen $\mathbf{A}$ werden durch die Wissensbasis $\mathbf{W}$ begründet, wenn sie nicht mit ihr im Widerspruch stehen. Der Streitfall wird also entschieden, je nach dem, ob in der Konklusion $\mathbf{K}$ Gleichungen der Form $0=1$ auftreten oder nicht.

(c) Rationale Analyse: $\underbrace{\mathbf{W}}_{unstrittig}, \underbrace{\mathbf{A}}_{strittig} \mapsto \mathbf{K}$

Streitpunkt ist die Frage, welchen Wert die Behauptungen in $\mathbf{A}$ haben. Er wird indirekt entschieden durch eine rationale Analyse,[10] bei der es herauszufinden gilt, welche Veränderungen $\mathbf{A}$ in der Wissensbasis anrichtet, d.h. was alles mitbehauptet wird, wenn man voraussetzt, daß alle Behauptungen in $\mathbf{A}$ wahr seien. Ergebnis der Analyse sind somit alle Aussagen, die als wahr angenommen werden müssen, damit sich die Behauptungen von $\mathbf{A}$ aus der Wissensbasis ableiten lassen. Über das Mitbehauptete sind dann Rückschlüsse auf diese Behauptungen möglich.

Steht keine formale Wissensbasis $\mathbf{W}$ zur Verfügung, so ist die rationale Analyse nur ein heuristisches Prinzip, d.h. man muß versuchen, durch Überlegungen die stillschweigenden Voraussetzungen zu ermitteln. Andernfalls läßt sie sich auf eine Schlußfolgerung zurückführen, wobei $\mathbf{A}$ die zu überprüfenden Behauptungen enthält. Diejenigen Elementarlösungen in der Konklusion, welche weder in $\mathbf{W}$ noch in $\mathbf{A}$ vorkommen, sind die gesuchten stillschweigenden Voraussetzungen. Befinden sich unter ihnen unakzeptable Aussagen, so ist $\mathbf{A}$ durch sie in Frage gestellt.

Als Beispiel betrachten wir die unvollständige Konklusion in der Schlußfolgerung (3); sie sei die neue Wissensbasis, die wir mit der Behauptung, $\mathbf{p_2}$ sei falsch, konfrontieren. Wir erhalten:

[10] Jaenecke, Peter: „Über den Wissensraum zur Einheit der Wissenschaften," in: Hans Poser (Hrg.): *Nihil sine ratione. Mensch, Natur und Technik im Wirken von G. W. Leibniz. Akten des VII. Internationalen Leibniz-Kongresses Berlin, 10. – 14. September 2001*, Vorträge 2. Teil, S. 562f.

$\mathbf{W_1(p_4)}$:	$\neg \mathbf{p_4} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_4} = 0$
$\mathbf{W_2(p_3)}$:	$\mathbf{p_3} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_3} = 1$
$\mathbf{W_3(p_1, p_2)}$:	$\mathbf{p_1} \vee \mathbf{p_2} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} + \mathbf{p_1 p_2} = 1$
$\mathbf{W_4(p_2, p_5)}$:	$\neg(\neg \mathbf{p_2} \wedge \neg \mathbf{p_5}) = \mathrm{w}$	$(\mathbf{p_2}+1)(\mathbf{p_5}+1) = 0$
$\mathbf{A(p_2)}$:	$\neg \mathbf{p_2} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_2} = 0$
	________________	________________ ,
$\mathbf{K_1(p_4)}$:	$\neg \mathbf{p_4} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_4} = 0$
$\mathbf{K_2(p_3)}$:	$\mathbf{p_3} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_3} = 1$
$\mathbf{K_3(p_2)}$:	$\neg \mathbf{p_2} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_2} = 0$
$\mathbf{K_4(p_1)}$:	$\mathbf{p_1} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_1} = 1$
$\mathbf{K_5(p_5)}$:	$\mathbf{p_5} = \mathrm{w}$	$\mathbf{p_5} = 1$

d.h. diese Behauptung läßt sich nur dann aufrecht erhalten, wenn man zugleich die beiden stillschweigenden Behauptungen $\mathbf{p_1} = \mathbf{p_5} = \mathrm{w}$ akzeptiert. Andere Annahmen führen auf andere Ergebnisse. Behauptet man etwa eingangs, $\mathbf{p_2}$ sei wahr, ergeben sich zwei redundante Gleichungen, so daß man über $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_5}$ nichts erfährt. Das gleiche Ergebnis liefert die Annahme $\mathbf{p_5} = \mathrm{w}$.

Durch Schlußfolgerungen, so wird oft behauptet, erfahre man nichts Neues, denn die gesamte Information sei schon in den Prämissen enthalten. Wie die obigen Beispiele zeigen, ist dies jedoch eine ungenaue Behauptung. Zwar kann die Konklusion $\mathbf{K}$ nur das enthalten, was in den Prämissen $\mathbf{W}$ und $\mathbf{A}$ enthalten ist, aber $\mathbf{W}$ und $\mathbf{A}$ haben eine unterschiedliche Funktion: $\mathbf{W}$ repräsentiert das relativ konstante Wissen, $\mathbf{A}$ die wechselnden, auf spezielle Situationen bezogenen Annahmen. Dieser Unterschied wird bei der obigen Behauptung nicht bedacht. Läßt man keine Annahmen zu, hat man den Spezialfall $\mathbf{W} \mapsto \mathbf{K}$, d.h. durch eine einzige Schlußfolgerung ist alles entschieden. Im anderen Fall hängt das, was aus der Wissensbasis folgt, auch von den Annahmen ab, und es gibt ebenso viele Schlußfolgerungen wie es verschiedene Annahmen gibt. So ist die Lösung $\mathbf{p_1} = \mathbf{p_5} = \mathrm{w}$ nur dann im obigen System „enthalten", wenn $\mathbf{p_2} = 0$ angenommen wird.

Es sei noch angemerkt, daß sich der Schlußfolgerungsansatz nicht dazu eignet, die Wissensbasis durch Annahmen zu falsifizieren. Zwar kann man ihn wie im Falle der rationalen Analyse als Werkzeug verwenden, um bestimmte Annahmen zu testen. Aber gezielt nach irgendwelchen Annahmen zu suchen, welche mit der Wissensbasis in Widerspruch stehen, ist keine sinnvolle Strategie, weil man die Ursache des Widerspruches nicht feststellen kann. Dazu benötigte man nämlich Wissen, das nicht in der Wissensbasis enthalten und damit nach Voraussetzung nicht verfügbar ist.

Wir betrachten nun einige Konsequenzen aus dem Schlußfolgerungsansatz.

6 Anmerkung zum Münchhausen Trilemma

Wissenschaftlichkeit zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß Behauptungen begründet werden müssen. Unter dem Namen ‚Münchhausen Trilemma' hat jedoch Albert einen Einwand formuliert, der die Möglichkeit einer durchgängigen Begründung bestreitet:

„Wenn man für *alles* eine Begründung verlangt, muß man auch für die Erkenntnisse, auf die man jeweils die zu begründende Auffassung - bzw. auf die betreffende Aussagen-Menge - zurückgeführt hat, wieder eine Begründung verlangen. Das führt zu einer Situation mit drei Alternativen, die alle drei unakzeptabel erscheinen, also zu einem Trilemma. ... Man hat hier offenbar nämlich nur die Wahl zwischen:

1. einem *infiniten Regreß*, der durch die Notwendigkeit gegeben erscheint, in der Suche nach Gründen immer weiter zurückzugehen, der aber praktisch nicht durchzuführen ist und daher keine sichere Grundlage liefert;

2. einem *logischen Zirkel* in der Deduktion, der dadurch entsteht, daß man im Begründungsverfahren auf Aussagen zurückgreift, die vorher schon als begründungsbedürftig aufgetreten waren, und der ebenfalls zu keiner sicheren Grundlage führt; und schließlich:
3. einem *Abbruch des Verfahrens* an einem bestimmten Punkt, der zwar prinzipiell durchführbar erscheint, aber eine willkürliche Suspendierung des Prinzips der zureichenden Begründung involvieren würde.“[11]

Albert bezieht sich explizit auf Schlußfolgerungen; sein Argument darf daher mit logischen Maßstäben gemessen werden. Wir untersuchen es im Sinne einer rationalen Analyse, indem wir uns fragen, welche Behauptung wahr sein muß, damit das Trilemma Geltung besitzt. Albert geht von der weit verbreiteten Vorstellung aus, Begründungen erfolgten in einer Abfolge von einzelnen Begründungsschritten: Aus gewissen Voraussetzungen zeigt man zunächst, daß eine Behauptung gilt; im nächsten Schritt ist es dann notwendig, die Wahrheit der Voraussetzungen zu beweisen, usw. Die stillschweigend von ihm vorausgesetzte Behauptung lautet demnach:

Die Begründung von Wissen setzt Wissen voraus, das nicht mit in die Begründung eingeht.

Diese Auffassung widerspricht jedoch dem Schlußfolgerungsansatz; legt man ihn zugrunde, stellt das Trilemma keine Einschränkung des Begründungsanspruches dar. Damit erübrigen sich auch alle Versuche, das Trilemma zu umgehen, etwa dadurch, daß man fordert, die ersten Voraussetzungen müßten pragmatisch operative Anfänge sein, die keiner deduktiven Begründung bedürfen.[12] Da Begründungen an eine Wissensbasis gebunden sind, kann sich der Begründungszusammenhang ändern, wenn diese sich ändert. Es gibt somit einerseits keine absolute Sicherheit, andererseits ist aber stets die Begründungsrationalität gewährleistet.

Im Schlußfolgerungsansatz gibt es auch kein Anfangsproblem. Damit entfällt z.B. seine operative Lösung, die darin besteht, durch normierte Handlungen bestimmte Anfangsschritte auszuzeichnen.[13] Ausgangspunkt ist immer eine Wissensbasis **W**; sie repräsentiert das jeweilige Wissen eines Sachgebietes. Man kann nur dafür sorgen, daß sie redundanz- und widerspruchsfrei ist; falsche Aussagen lassen sich dadurch aber nicht vermeiden. Eine operative Lösung würde die Wissensbasis nicht wahrer machen und ist daher überflüssig.

7 Anmerkung zum Unentscheidbarkeits- und Unvollständigkeitssatz

Die Verwirklichung des Calculemus-Gedankens wurde hier anhand der Aussagenlogik gezeigt. Man könnte nun einwenden, das sei aufgrund der Entscheidbarkeit der Aussagenlogik nicht weiter verwunderlich. Diese sei aber nur eine ausdrucksarme Logik, bei realen Anwendungen müsse man zu einer ausdrucksstärkeren übergehen, etwa zur Prädikatenlogik; welche aber, wie Church[14] gezeigt hat, nicht entscheidbar ist, und so lasse sich der Calculemus-Gedanke eben doch nicht verwirklichen. Entsprechendes ergebe sich auch aus dem Unvollständigkeitssatz von Gödel.[15]

Welche Behauptungen müssen wahr sein, damit das obige zutrifft? Es stehe eine Wissensbasis in Form eines Gleichungssystems zur Verfügung, das neben aussagenlogischen auch prädikatenlogische Formeln enthalten kann. Da unser Wissen endlich ist, kann es ebenfalls nur aus endlich vielen Gleichungen bestehen. Dann enthält der obige Einwand folgende stillschweigende Annahmen:

---

[11] Albert, Hans: „Traktat über die kritische Vernunft.“ J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen ^{5}1991, S. 15.

[12] Mittelstraß, Jürgen: „Der Flug der Eule. Von der Vernunft der Wissenschaft und der Aufgabe der Philosophie.“ Suhrkamp Verlag Frankfurt/M. ^{2}1997, S. 224, S. 274 u. passim. So ganz voraussetzungsfrei ist übrigens diese Methode auch nicht, denn die Wahl der operativen Mittel impliziert stillschweigende Voraussetzungen.

[13] Mittelstraß, ibid., S. 273.

[14] Church, Alonso: „A note on the Entscheidungsproblem.“ *Journal of Symbolic Logic* **1**, 1936, S. 40-41; „Correction“ ibid. S. 101-102.

[15] Gödel, Kurt: „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.“ *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, 1931, S. 173-198.

(a) Die Prädikatenlogik ist ein notwendiges Darstellungsmittel für Wissen.

(b) Ein System mit endlich vielen aussagen- bzw. prädikatenlogischen Gleichungen ist unlösbar,

denn es gibt keinen Algorithmus, mit dem für jede beliebige prädikatenlogische Formel in einer Abfolge von endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht;

denn jede hinreichend ausdrucksfähige widerspruchsfreie formalisierte Theorie *T* mit rekursiv axiomatisierbarer Satzmenge ist unvollständig.

Man kann die Einwände gegen die Durchführbarkeit des Calculemus-Gedankens nur dann aufrechterhalten, wenn man zuvor diese beiden Annahmen bewiesen hat. Das wird nicht leicht fallen, wenn man bedenkt, daß die Prädikatenlogik in den Wissenschaften keine Rolle spielt und daß man die generelle Lösbarkeit eines endlichen Gleichungssystems bestreitet.

8 Schlußbemerkung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Calculemus-Gedanke am Beispiel der Aussagenlogik dargelegt, um in Anlehnung an Leibniz die Verbindung zwischen Rechnen und Schlußfolgern aufzuzeigen. Der Gedanke, inhaltliche Fragen rechnerisch zu entscheiden, läßt sich jedoch mit jedem mathematischen Verfahren umsetzen, sofern es sich zur Darstellung des betreffenden Wissens eignet; das belegen zahlreiche Beispiele aus den Wissenschaften. So sind bei allen Entscheidungen in der Physik maßgeblich Berechnungen beteiligt und in der Technik führt man im großen Stil Simulationen auf dem Rechner durch, um technisches Verhalten vorauszuberechnen. In diesen Bereichen konnte somit der Calculemus-Gedanke in ungeahntem Ausmaß verwirklicht werden, wobei ein Ende der Mathematisierung noch nicht abzusehen ist.

In der Philosophie dagegen klammert man sich noch immer an einige metamathematische Sätze, um die Behauptung aufrechtzuerhalten, der Calculemus-Gedanke sei undurchführbar, als sei es vordringliches Anliegen von Leibniz gewesen, metamathematische Probleme zu klären. Diese Sätze sagen etwas über formale Systeme aus, also über das Sprachmedium, sie sagen aber nichts über den mit ihnen beschriebenen Inhalt aus, um den es Leibniz vor allem ging. Auch jede Umgangssprache ist offenbar unentscheidbar, woraus man nach obigem Verständnis jedem von ihrem Gebrauch abraten müßte.

Im übrigen ist es nicht ganz ohne Ironie, daß man ausgerechnet den Unvollständigkeitssatz gegen den Calculemus-Gedanken ins Feld führt, jenen Satz, den Gödel – offenbar durch den Calculemus-Gedanken von Leibniz inspiriert – mit Hilfe eines arithmetischen Verfahrens – der nach ihm benannten Gödelisierung - beweist.

Im Umkreis der Wissensdarstellung gibt es noch eine ganze Reihe ungelöster Probleme sprachtheoretischer sowie erkenntnis- bzw. wissenschaftstheoretischer Art; statt ungeprüft auf überkommene es-geht-nicht-Behauptungen zu bauen, wäre es sicherlich fruchtbarer, sich der Lösung dieser Probleme zu widmen.

Letzte Änderung: 6. September 2006.
pjaenecke@gmx.de